Trabajo Fin de Máster

Proporcionalidad Aritmética: una propuesta didáctica para 4º de E.S.O.

Arithmetic Proporcionality: a didactical proposal for 4th year of "*E.S.O.*"

Autor

Carlos Ibáñez Freire

Director

Sergio Martínez Juste

Facultad de Educación

Curso 2017-2018

Índice

Introducción

En la siguiente memoria se recoge una propuesta didáctica de proporcionalidad aritmética para cuarto curso de Educación Secundaria Obligatoria, en particular, para la opción de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas. La proporcionalidad aritmética nos permite dar respuesta a multitud de preguntas de problemas aritméticos. Este objeto matemático está fuertemente arraigado en los contextos diarios de las personas. Su importancia se debe en gran parte a la cantidad de aplicaciones en la vida real que nos permite manejar: trueques, intercambio de divisas, repartos, porcentajes, intereses, mezclas…

Ilustrando algunos ejemplos, nos permite desde calcular cuánto van a costar ciertos kilogramos de un producto en el supermercado, cuántos kilogramos podré comprar con cierta cantidad de dinero, cómo son de rentables las diversas ofertas que puede haber en un supermercado; cuánto dinero supone adquirir una hipoteca a un interés fijo; cuánto tiempo tardaré en horas o minutos en recorrer cierta distancia si mantengo una velocidad constante determinada; cómo de rentables son las ofertas de descuentos que hay en las tiendas; cómo repartir el premio de una lotería atendiendo al dinero de participación de cada persona, etc.

La proporcionalidad aritmética marca la culminación de la aritmética escolar, desarrollándose en el seno de la misma, aunque también se pueden dar enfoques más algebraicos o analíticos. Se trata de un objeto fundamental en el currículo que se encuentra presente en todos los niveles educativos de la educación obligatoria.

Esta memoria está dividida en secciones, en las cuales se irán desglosando los diferentes aspectos que darán lugar a la propuesta didáctica. El objetivo principal de las primeras secciones será abordar las nociones generales de la proporcionalidad aritmética que se deberán tener en cuenta para elaborar la propuesta didáctica, tales como: situación del objeto matemático dentro del currículo oficial, análisis de los procesos de enseñanza-aprendizaje que se utilizan habitualmente en el aula, conocimientos previos que los alumnos deben dominar para enfrentarse con éxito al objeto matemático.

En las siguientes secciones, teniendo en cuenta la información anterior y la lectura de diversos trabajos de investigación actuales sobre la proporcionalidad aritmética se estructurará, siguiendo el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico, las razones de ser, campos de problemas, técnicas y tecnologías que se utilizarán en la propuesta didáctica así como la metodología a seguir en su implementación en el aula.

En la penúltima sección, se mostrará la secuenciación didáctica pensada para implementar en el aula los aspectos tratados en los apartados anteriores. Para concluir la memoria, la última sección será relativa a los métodos de evaluación que asegurarán que los alumnos han logrado el grado de adquisición de competencias y contenidos deseados.

A. Definición del objeto matemático a enseñar

A.1. Objeto matemático a enseñar

El objeto matemático que se ha elegido para esta propuesta didáctica es la proporcionalidad aritmética en 4º de E.S.O. Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas. Toda situación de proporcionalidad aritmética se caracteriza por una relación funcional del siguiente tipo:

$$f(X_1, \dots, X_n, X) = X \cdot \prod_{i=1}^{n} X_i^{p_i} = cte \text{ con } p_i \in \{-1,1\}$$

Siendo $X_1, \dots, X_n, X$ las magnitudes involucradas en la situación de proporcionalidad, p_i será -1 ó 1 dependiendo si la relación entre X_i y X es directa o inversamente proporcional. La constante que interviene en la función anterior recibe el nombre de constante de proporcionalidad.

Definición de proporcionalidad directa: dos magnitudes son directamente proporcionales si al multiplicar o dividir una magnitud por cierto número real la otra magnitud se multiplica o divide, respectivamente, por dicho número.

Definición de proporcionalidad inversa: dos magnitudes son inversamente proporcionales si al multiplicar o dividir una magnitud por cierto número real la otra magnitud se divide o multiplica, respectivamente, por dicho número.

En la sección E, relativa a los campos de problemas, se detallarán las distintas situaciones en la que interviene la proporcionalidad aritmética.

Las nociones generales de proporcionalidad han sido introducidas con anterioridad en 1º, 2º de E.S.O. Esta secuencia tendrá como objetivo la consolidación, comprensión y ampliación de la proporcionalidad aritmética tratada en los cursos anteriores. Se tratarán los siguientes aspectos relativos a la proporcionalidad:

i. Razón y proporción.
ii. Proporcionalidad directa.
iii. Proporcionalidad inversa.
iv. Proporcionalidad compuesta.
v. Aplicaciones de la proporcionalidad: porcentajes, repartos, interés simple e interés compuesto, mezclas y aleaciones.

A.2. Situación en el currículo

El marco legislativo actual para la Educación Secundaria y Primaria se basa en la **Ley Orgánica 8/2013**, del 9 diciembre, para la Mejora de la Calidad Educativa; cuyo currículo básico a nivel estatal se establece en el **Real Decreto 1105/2014**, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.

Por otro lado, en Aragón, el currículo ha sido concretado de forma más precisa mediante la **ORDEN ECD/489/2016**, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria para la comunidad autónoma de Aragón. En dicha orden se establecen los siguientes elementos del currículo relativos a la proporcionalidad aritmética:

Primer curso de Educación Secundaria Obligatoria

Contenidos:

- Razón y proporción. Magnitudes directa e inversamente proporcionales. Constante de proporcionalidad.
- Resolución de problemas en los que intervenga la proporcionalidad directa o inversa.

Criterios de evaluación:

- Crit.MA.2.5. Utilizar diferentes estrategias (empleo de tablas, obtención y uso de la constante de proporcionalidad, reducción a la unidad, etc.) para obtener elementos desconocidos en un problema a partir de otros conocidos en situaciones de la vida real en las que existan variaciones porcentuales y magnitudes directa o inversamente proporcionales.

Segundo curso de Educación Secundaria Obligatoria

Contenidos:

- Razón y proporción. Magnitudes directa e inversamente proporcionales. Constante de proporcionalidad.
- Resolución de problemas en los que intervenga la proporcionalidad directa o inversa o variaciones porcentuales. Repartos directa e inversamente proporcionales.

Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
Crit.MA.2.5. Utilizar diferentes estrategias (empleo de tablas, obtención y uso de la constante de proporcionalidad, reducción a la unidad, etc.) para obtener elementos desconocidos en un problema a partir de otros conocidos en situaciones de la vida real en las que existan variaciones porcentuales y magnitudes directa o inversamente proporcionales.	Est.MA.2.5.1. Identifica y discrimina relaciones de proporcionalidad numérica (como el factor de conversión o cálculo de porcentajes) y las emplea para resolver problemas en situaciones cotidianas.
	Est.MA.2.5.2. Analiza situaciones sencillas y reconoce que intervienen magnitudes que no son directa ni inversamente proporcionales.

Cuarto curso de E.S.O. Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas: Contenidos:

- Proporcionalidad directa inversa. Aplicación a la resolución de problemas de la vida cotidiana.
- Los porcentajes en la economía. Aumentos y disminuciones porcentuales. Porcentajes sucesivos. Interés simple y compuesto.

Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
Crit.MAAP.2.1. Conocer y utilizar los distintos tipos de números y operaciones, junto con sus propiedades, para resolver problemas relacionados con la vida diaria y otras materias del ámbito académico recogiendo, transformando e intercambiando información.	Est.MAAP.2.1.6. Aplica porcentajes a la resolución de problemas cotidianos y financieros y valora el empleo de medios tecnológicos cuando la complejidad de los datos lo requiera.
	Est.MAAP.2.1.7. Resuelve problemas de la vida cotidiana en los que intervienen magnitudes directamente e inversamente proporcionales.

En dicha orden no aparecen contenidos de proporcionalidad explícitos para los cursos de 3º de E.S.O. ni de 4º de E.S.O. Académicas en el bloque de números y álgebra. En cuanto a los criterios y estándares, vemos que en 4º de E.S.O. Aplicadas solo aparecen asociados a la resolución de problemas. Esta orden establece el currículo legal, sin embargo, el currículo impartido en la práctica puede verse caracterizado de forma más precisa mediante el estudio de libros de texto, como sugieren Martínez, Muñoz y Oller (2015), en la sección B de esta memoria se analizarán 3 libros de texto de las principales editoriales.

A.3. Campo de problemas, técnicas, tecnologías que se pretenden enseñar

La metodología queda en gran parte definida por los campos de problemas, técnicas y tecnologías que se utilizan en el aula.

En nuestro caso, los problemas tendrán varios objetivos. Por un lado, formar al alumno en la competencia matemática de resolución de problemas, por otro lado, tendrán un carácter introductorio, se plantearán situaciones problemas iniciales, para guiar a los alumnos en la construcción de su propio aprendizaje de la forma más autónoma posible, este tipo de problemas formarán las razones de ser, se abordarán con detalle en la sección D. Los problemas estarán adecuadamente contextualizados con situaciones lo más cercanas posibles a los alumnos. Los campos de problemas se tratarán con profundidad en la sección E de esta memoria, a continuación enumeraremos los campos de problemas considerados:

Campos de problemas

CP1. Análisis de situaciones de proporcionalidad

- CP1.1. Identificación de magnitudes
- CP1.2. Problemas asociados a reflexionar qué tipo de dependencia existe entre las variables
- CP1.3. Cálculo de razones y constantes de proporcionalidad

CP2. Problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad

- CP2.1. Valor perdido en proporcionalidad simple directa
- CP2.2. Valor perdido en proporcionalidad simple inversa
- CP2.3. Valor perdido en proporcionalidad compuesta

CP3. Problemas de comparación en situaciones de proporcionalidad

CP4. Porcentajes sucesivos

CP5. Repartos proporcionales

- CP5.1. Repartos directamente proporcionales
- CP5.2. Repartos inversamente proporcionales

CP6. Mezclas y aleaciones

Con respecto las técnicas, a la hora de resolver los problemas se buscarán procedimientos basados en la comprensión, en los que los alumnos consigan la solución dando significado a las distintas operaciones que realicen. Se evitarán técnicas basadas en el uso de fórmulas, ya que considero que las técnicas basadas solo en la memoria son asimiladas de manera más superficial, el alumno puede incidir en más errores al desconocer el porqué de las operaciones que realiza, la aplicación de técnicas memorísticas a problemas tipo difícilmente van a conseguir desarrollar la cognición matemática y la competencia en la resolución de problemas por parte del alumno. En la sección F se tratarán con detalle las técnicas asociadas a los distintos campos de problemas, a continuación las enumeramos:

Técnicas

- T1. Técnicas asociadas al análisis de situaciones de proporcionalidad
  - T1.1. Técnicas asociadas a la identificación de magnitudes
  - T1.2. Técnicas asociadas a reflexionar que tipo de dependencia existe entre las variables
  - T1.3. Técnicas asociadas al cálculo de razones
- T2. Técnicas asociadas a problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad
  - T2.1. Mediante el uso de la Regla de Tres
  - T2.2. Proporciones
  - T2.3. Amalgamación de magnitudes
  - T2.4. Paso a paso pasando por la unidad
- T3. Técnicas asociadas a problemas de comparación en situaciones de proporcionalidad
- T4. Técnicas asociadas a porcentajes sucesivos
- T5. Técnicas asociadas a repartos
- T6. Técnicas asociadas a problemas de mezclas y aleaciones

Sobre las tecnologías que justifican las técnicas anteriores se hablará con mayor detalle en la sección F, en esta propuesta didáctica, las técnicas que se enseñen tendrán una justificación que permita al alumno entender lo que está haciendo. Estas tecnologías se basarán principalmente en las definiciones de razón como “tanto por uno”, condiciones de regularidad, proporcionalidad entre dos magnitudes; lo cual nos permitirá justificar el método de paso a paso pasando por la unidad para los problemas de proporcionalidad compuesta, en los cuales establecer una justificación por la técnica de proporciones puede resultar más complicado. Para las aplicaciones de la proporcionalidad (porcentajes encadenados, repartos, mezclas) a partir de los conocimientos anteriores, se justificarán dando sentido a las operaciones según el contexto del problema. Enumerando las tecnologías:

Tecnologías

TEC1. Tecnologías asociadas al análisis de situaciones de proporcionalidad

- Razón como "tanto por uno"
- Razón como "tanto por ciento"
- Condiciones de regularidad

TEC2. Tecnologías asociadas a problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad

- Definición de proporcionalidad entre dos magnitudes

TEC3. Tecnologías asociadas a problemas de comparación en situaciones de proporcionalidad

TEC4. Tecnologías asociadas a porcentajes sucesivos

TEC5. Tecnologías asociadas a repartos

TEC6. Tecnologías asociadas a problemas de mezclas y aleaciones

B. Estado de la enseñanza-aprendizaje del objeto matemático

B.1. Justificación habitual de la proporcionalidad aritmética

Como ya hemos mencionado en la sección anterior, el marco legal actual del sistema educativo es la LOMCE. En Aragón, la **ORDEN** ECD/489/2016, de **26 de mayo**, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria, ha concretado en cierto grado los contenidos que se tienen que impartir.

Sin embargo, dichos contenidos suelen aparecer poco desglosados y detallados, siendo los libros de texto de las diferentes editoriales quienes, en gran medida, determinan los objetos del saber y metodologías presentes en las aulas.

En este sentido, se posicionan diversos autores como Monterrubio y Ortega (2009, p. 38), Gómez (Gómez, 2011, p. 50), Schubring (1987), Huntley y Terrell (2014); citados por Oller (2012, pp. 69-70), Martínez, Muñoz y Oller (2015, pp. 97-99). Algunas de las citas previamente mencionadas, Monterrubio y Ortega:

"el libro de texto es un recurso habitual en el desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje, hasta el punto de que, en muchas ocasiones, es el propio manual el que determina el currículo real".

Schubring:

"*los libros de texto determinan la enseñanza en la práctica más que los decretos de los diferentes gobiernos*"

En nuestro caso, estudiaremos libros de texto actuales de 4º de E.S.O. Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas. Cabe mencionar que debido al calendario de implantación de la LOMCE, estos libros han entrado en vigor en 2016 (fuente: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte del Gobierno de España). Los libros de texto elegidos son de las editoriales:

- **Anaya (2016)**
- **Edelvives (2016)**
- **Santillana (2016)**

B.2. Razones de ser, campos de problemas, técnicas, tecnologías que se enseñan habitualmente

Los libros de texto analizados desarrollan la proporcionalidad en el seno de la Aritmética y en ocasiones se hace uso de conocimientos elementales de Álgebra para despejar las incógnitas dadas por las fórmulas que se presentan en los libros. En cualquier caso, tanto en Álgebra como en Números los alumnos poseen una base, adquirida en años anteriores, más que suficiente para afrontar con mayor éxito las exigencias requeridas por los conceptos de proporcionalidad aritmética.

Sobre las razones de ser

Entendiendo como razones de ser las situaciones problema que se plantean a los alumnos para que experimenten la necesidad de construir personalmente las praxeologías asociadas a los correspondientes objetos matemáticos. En los libros de texto no encontramos razones de ser que se enmarquen en esta concepción. Sin embargo, si cabe señalar que todos los libros analizados cuentan con un texto al principio de la unidad que introduce el tema de la proporcionalidad aritmética, lo cual se podría ver como un intento de contextualizar y justificar la necesidad de desarrollar los conceptos de proporcionalidad aritmética. En algunas editoriales, como Anaya, este texto introductorio solo se limita a dar una contextualización histórica.

En el transcurso de la unidad, Anaya y Santillana no plantean ningún problema introductorio para abordar los distintos contenidos relativos a la proporcionalidad, lo que hacen es institucionalizar a priori los conceptos que se quieren transmitir, para luego ejemplificar dichos conceptos con problemas resueltos. Por otro lado, Edelvives sí que suele introducir problemas antes de institucionalizar los conceptos, sin embargo, dichos problemas introductorios ya están resueltos.

Sobre los campos de problemas, técnicas y tecnologías

A continuación estudiaremos los campos de problemas, técnicas y tecnologías presentes en los libros analizados. Para realizar este estudio, resulta conveniente distinguir entre los distintos contenidos de la proporcionalidad aritmética, ya que los libros de texto suelen seguir esta estructura. Se ha seguido un esquema y caracterización similar al de Oller (2012, pp. 69-124), también puede hacerse referencia a la codificación expuesta en la sección anterior para catalogar los campos de problemas, técnicas y tecnologías. El objetivo del estudio es caracterizar los libros, no se busca hacer un estudio exhaustivo de los mismos.

i. Razón y proporción.

	Definen razón y proporción	Razón entre números o cantidades
Anaya	No	Ninguna
Edelvives	Sí	Números
Santillana	Sí	Ambas

No se presentan las diferencias entre magnitudes y números. En la editorial Edelvives, se considera igual la razón que la fracción. En las editoriales que se define la razón no definen ni tratan la distinción entre razón interna y la razón externa. Definen la proporción como una igualdad de razones.

No se reflexiona en ningún caso sobre el significado de razón en la editorial Edelvives. En Santillana podemos encontrar el siguiente significado de razón, a/b significa que por cada b unidades se tienen a unidades (de sus respectivas magnitudes). No aparecen otros significados, como razón como tanto por uno; razón como cociente, el número por el que hay que multiplicar al primero para obtener el segundo…

Edelvives menciona la propiedad de que el producto de extremos es igual al producto de medios:

$$\frac{a}{b} = \frac{d}{c} \Rightarrow \ ac = db$$

Ninguna define la propiedad:

$$\frac{a}{b} = \frac{d}{c} = \frac{\mathrm{a} \pm \mathrm{d}}{\mathrm{b} \pm \mathrm{c}}$$

Esta propiedad puede servir para tratar los repartos.

Los problemas y ejercicios se basan en obtener ciertas razones o plantear las igualdades de razones que se tienen que cumplir en los problemas de valor perdido.

ii.Proporcionalidad directa.

Se trata en todas las editoriales. Puede abordarse atendiendo a ciertos aspectos:

	Anaya	**Edelvives**	**Santillana**
Razones externas	No	No	No
Multiplicativa	No	Sí	Sí
Aumentos y disminuciones	Sí	No	No
Explícita funcional	No	No	No
Implícita funcional	No	Sí	No

Dos magnitudes son directamente proporcionales si la **razón externa** se mantiene constante, es decir, si el cociente entre pares de magnitudes es constante. Esta definición se corresponde con la aplicación directa de la noción de razón.

Multiplicativa: dos magnitudes son directamente proporcionales si al doblar, triplicar… una magnitud la otra también se dobla, triplica… O si al tomar la mitad, un tercio… de una magnitud la otra también se reduce a la mitad, al tercio…

Explicita funcional: Dos magnitudes son directamente proporcionales si se puede expresar una en función de la otra mediante una función lineal $f(X_1) = k \cdot X_2$.

Implícitamente funcional: Consiste en una generalización de la definición multiplicativa, en vez de considerar los naturales en la definición, consideramos todos los números reales. Dos magnitudes son directamente proporcionales si al multiplicar (dividir) una magnitud por cierto número real la otra magnitud se multiplica (divide) por dicho número.

Mencionar que la definición por **aumentos y disminuciones** es falaz, esta definición postula que dos magnitudes son directamente proporcionales si al aumentar (disminuir) una de ellas cierta cantidad la otra también aumenta (disminuye). Lo cual es equivalente a decir que hay proporcionalidad directa si y solo si la función de proporcionalidad asociada es creciente. Lo cual es falso, ya que no todas las funciones crecientes son lineales. Esto puede confundir al alumno, induciéndole a pensar que hay proporcionalidad directa cuando lo que hay es una dependencia funcional no lineal, o pensar que todas las relaciones de aumentos y disminuciones son lineales (proporcionales). Esta idea ha sido denominada como "ilusión de linealidad" por autores como Van Dooren (2008).

Técnicas presentes en los libros de texto para resolver problemas de valor perdido:

	Anaya	Edelvives	Santillana
Regla de Tres	Sí	Sí	Sí
Reducción a la Unidad	No	No	Sí
Proporciones	No	Sí	No

De las tres técnicas anteriores, los libros dan más importancia a la Regla de Tres.

Tecnologías:

No se da importancia a la hora de justificar las técnicas, si bien se tratan técnicas como la reducción a la unidad o la resolución algebraica mediante el uso de proporciones que podrían servir para construir la tecnología. Ocurren dos cosas, o bien se menciona sin especificar nada:

> Para resolver problemas de proporcionalidad directa, se emplean las proporciones o la regla de tres simple. En el ejemplo anterior:
>
> $$\frac{5}{40} = \frac{10}{x} \Rightarrow 40 \cdot 10 = 5 \cdot x \Rightarrow 5x = 400 \Rightarrow x = 80$$

Edelvives, pág. 43

O bien se pone, después de explicar la regla de tres, de forma más secundaria y con poco detalle:

> Otra forma de resolver este problema es calculando los gramos de harina que se necesitan para una persona:
>
> $$x = \frac{450}{6} = 75 \text{ g}$$
>
> Para hacer una tarta de una ración se necesitan 75 g de harina, y para hacerla de 8 raciones, utilizaremos 8 veces esa cantidad, es decir, $75 \cdot 8 = 600$ g.
>
> Este segundo método se denomina **reducción a la unidad**.

Anaya, pág. 28

iii.Proporcionalidad inversa.

Este apartado es análogo al de proporcionalidad directa, más allá de las particularidades inherentes a cada tipo de proporcionalidad.

Técnicas para resolver problemas de valor perdido:

	Anaya	Edelvives	Santillana
Regla de tres	Sí	Sí	Sí
Reducción a la unidad	No	No	Sí
Proporciones	No	Sí	No

Tecnologías

No se da importancia a la hora de justificar las técnicas

iv.Proporcionalidad compuesta.

	Anaya	Edelvives	Santillana
Proporcionalidad compuesta	Sí	Sí	No

Campos de problemas, técnicas y tecnologías

Anaya trata explícitamente los casos de directa-inversa (la magnitud correspondiente al valor perdido se relaciona de forma directa con una magnitud e inversa con la restante) y directa-directa. La técnica utilizada para resolver estos problemas es puramente procedimental, la regla de tres compuesta. Posteriormente, ciertos problemas presentan los casos de proporcionalidad compuesta inversa-inversa. Es curioso que después de inducir al alumno resoluciones mediante el uso de una fórmula de carácter memorístico, luego se plantee al alumno problemas en los que se pretende que los resuelva modificando una fórmula que carece de un significado dado.

Edelvives trata los tres casos que se pueden dar con tres magnitudes en la proporcionalidad compuesta. La técnica es la regla de tres compuesta, dice, que resulta de aplicar sucesivamente varias reglas de tres simples.

No se tratan problemas de proporcionalidad compuesta con más de tres magnitudes.

vii. Aplicaciones de la proporcionalidad: porcentajes, repartos, interés simple y compuesto, mezclas y aleaciones.

Podemos ver distintos tipos de aplicaciones: porcentajes, interés simple y compuesto, repartos, mezclas y aleaciones.

	Anaya	**Edelvives**	**Santillana**
Porcentajes	Sí	Sí	Sí
Interés simple y compuesto	Sí	Sí	Sí
Repartos directos/ inversos	Sí	Sí	No
Mezclas/ aleaciones	Sí	No	No

Porcentajes:

Anaya: Inicialmente lo plantea de una forma artificial para poder resolverlo con una regla de tres:

$$\frac{100}{Total} = \frac{P}{Parte\ del\ total}$$

Para resolver la incógnita deseada sugiere aplicar una regla de tres. Posteriormente, asocia porcentaje con una fracción de denominador 100, y con un número decimal.

Se trabaja el cálculo mental para calcular ciertos porcentajes, mediante la elección más conveniente (porcentaje como fracción, numero decimal…)

Trata los distintos tipos de problemas que pueden suceder de forma explícita, dando su correspondiente fórmula para cada uno de ellos:

- Calculo del total, conocido el % y la parte
- Calculo del %
- Aumentos y disminuciones porcentuales: define índice de variación y sugiere una fórmula para resolverlo
- Calculo de la cantidad inicial: sugiere una fórmula para resolverlo
- Calculo del porcentaje de aumento o disminución
- Encadenamiento de variaciones porcentuales

Se evidencia en cierta medida, la siguiente metodología:

Los alumnos aprenden a resolver los problemas mediante:

- Trabajo explícito de todas las tipologías de problemas que aparecen en la unidad
- Todos con sus correspondientes fórmulas

Este ideario impregna toda la unidad, salvo alguna excepción puntual.

Edelvives:

Tras una breve contextualización, introduce porcentaje como tanto por ciento, una cantidad de cada 100. Posteriormente define cálculo de un porcentaje de una cantidad.

La notación que utiliza puede dar lugar a confusión, ya que es ambigua; dependiendo del contexto, $t\%$ significa tomar t partes de cada 100, pero por otro lado, % también se usa para definir un porcentaje concreto, o para definir el número t, partes que se obtienen de cada 100. Se define la fórmula del cálculo de un porcentaje como:

$$\%\text{ de } C = \frac{\%\cdot C}{100}$$

Habría sido más correcto decir

$$t\,\%\text{ de } C = \frac{t}{100}\cdot C$$

Para calcular la parte, el total, o el porcentaje. Se sugiere la siguiente proporción:

$$Parte/total\ =\ t\%$$

Y despejar mediante álgebra. Para el cálculo de aumentos/disminuciones de porcentajes se presentan fórmulas y se define el índice de variación. Pasa lo mismo para los aumentos/disminuciones encadenados.

Santillana:

Define directamente el tanto por ciento (porcentaje) de una cantidad. Respecto a las técnicas sugiere aplicar una regla de tres, o calcular directamente el porcentaje (relacionándolo con una fracción con denominador 100).

Trata los aumentos/disminuciones porcentuales, calculando el $(100 + -t)\%$ de dicha cantidad. Para calcular porcentajes sucesivos sugiere calcular el porcentaje que resulta de multiplicar los distintos porcentajes.

Interés simple e interés compuesto

Anaya:

Contextualiza los problemas de interés con los depósitos y préstamos que proporcionan los bancos. Posteriormente define la terminología asociada: capital, rédito, tiempo, interés.

Trata por separado el interés simple y el interés compuesto. Plantea las fórmulas necesarias para resolverlos, ejemplificándolas de forma más detallada. El alumno presupone a la hora de hacer los problemas que el interés es compuesto a no ser que se diga lo contrario.

Edelvives:

Contextualiza los problemas de interés con los depósitos y préstamos que proporcionan los bancos. Define: capital inicial, intereses, tipo de interés, tiempo, capital final.

Tras un breve problema resuelto, se dan las fórmulas generales para resolver los problemas de interés simple e interés compuesto. Se especifica en los enunciados si el interés es simple o compuesto.

Santillana:

Se plantean las fórmulas para resolver los problemas de interés simple y compuesto. Se define interés, capital, tiempo, rédito. Se presupone que si no se específica nada en el enunciado del problema se trata de **interés simple**.

En todos las editoriales se supone que los intereses son dados de forma continua (si son intereses anuales, pero el depósito es recogido en x días, el banco te pagará los intereses correspondientes). Esto no sucede en la realidad, y además, es falso si se trata del interés compuesto.

Contraejemplo: en los libros estudiados consideran equivalente un 5% de interés anual a un $5/12 = 0.4166\%$ mensual. En el caso del interés simple sí que es cierto, pero si se usa en el interés compuesto es falso. Ya que 1000 euros al 5% interés anual durante 5 años (interés compuesto) resultan en 1276.2815 euros, mientras que 1000 euros a un 0.4166% de interés mensual durante 5 años (interés compuesto) son 1283.3581 euros.

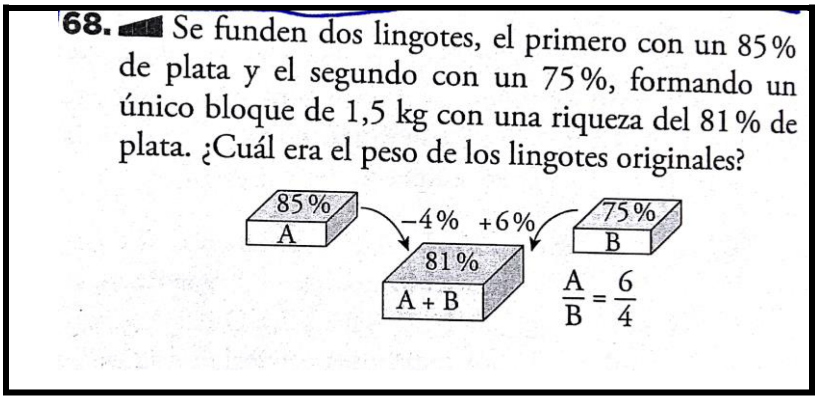
Repartos:

Solo aparecen en el libro de Anaya y Edelvives. No se incide en el significado de reparto, se catalogan los problemas en repartos inversos y directos; en el caso de repartos directos se sugiere resolverlo atendiendo al significado de las operaciones, se divide la cantidad a repartir entre el total de las participaciones y luego se reparte de forma proporcional a las participaciones individuales. Para repartos de proporcionalidad inversa, se da una fórmula sin justificación alguna. Suelen ser problemas muy artificiales. En los enunciados se suele explicitar si el reparto es directa o inversamente proporcional, con lo que afrontar estos problemas suele reducirse a memorizar dos fórmulas.

Mezclas y aleaciones:

Solo se presentan en el libro de Anaya, se resuelven dando significado a las operaciones. Se busca coste total y se divide entre el peso total o para aleaciones cantidad de metal entre cantidad total. Pueden usarse con porcentajes

En los problemas más difíciles no se deja reflexionar al alumno del todo, se ponen ayudas, que además condicionan una forma de resolución.


68. Se funden dos lingotes, el primero con un 85 % de plata y el segundo con un 75 %, formando un único bloque de 1,5 kg con una riqueza del 81 % de plata. ¿Cuál era el peso de los lingotes originales?

Anaya pág. 67

Tratamiento de los ejercicios-problemas

En todas las editoriales la mayoría de los problemas aparecen en bloques según el contenido que tratan (proporcionalidad directa, compuesta, repartos…), es decir, aparecen tipificados a priori. Esto elimina, en muchas ocasiones, que el alumno tenga que discernir qué tipo de problema es.

Gran parte de los problemas se convierten en meros ejercicios de refuerzo de la técnica ya que dentro de un mismo objeto (Ej. Proporcionalidad directa) suelen ser problemas prácticamente análogos, a excepción de la semántica del enunciado.

Salvo excepciones muy puntuales, los problemas que se plantean son solo de la tipología vista explícitamente en el transcurso de la unidad. Y los problemas que aparecen suelen ser poco creíbles. Donde además en muchas ocasiones los alumnos tienen que presuponer hipótesis de forma totalmente arbitraria (Ej. Suponer interés simple o compuesto) o usar conocimientos físicos que desconoce (Ej. decidir si son directa o inversamente proporcionales el volumen de un gas y la temperatura, las dioptrías y la distancia).

No hay problemas de proporcionalidad de comparación cualitativa o cuantitativa (salvo una excepción puntual).

B.3. Efectos de la enseñanza tradicional en los alumnos

Si bien es cierto que todos estos libros siguen una estructura similar: institucionalización, ejemplificación, ejercicios-problemas que trabajen las técnicas, ausencia general de justificación. Cada editorial presenta sus propias particularidades. A continuación, se mencionan los principales aspectos característicos de cada editorial:

Anaya: no es rigurosa en las definiciones, en ocasiones son falaces (define que dos magnitudes están relacionadas mediante la proporcionalidad directa si al aumentar una aumenta la otra), no se preocupa por las tecnologías, estas están casi completamente ausentes, se limita a dar la fórmulas necesarias para resolver los distintos tipos de problemas que se pueden presentar; sin embargo, es la editorial más exigente en lo que respecta a contenidos (es la única que trata problemas de mezclas y aleaciones).

Edelvives: una editorial con mucho texto escrito que suele utilizar para ejemplificar o contextualizar los contenidos. Trata explícitamente toda la tipología que aparece en los distintos tipos de problemas.

Santillana: la editorial que más se preocupa por justificar las técnicas, aunque estas justificaciones siguen siendo pobres. Por otro lado es la editorial que menos profundiza en los contenidos (no trata proporcionalidad compuesta, repartos ni mezclas y aleaciones). Se caracteriza por definiciones muy breves, posteriormente ejemplificadas.

En cuanto al carácter de los libros en general.

A pesar de ser textos de diferentes editoriales, comparten muchas características comunes. Todos ellos, atendiendo a su estructura, favorecen el contrato didáctico tradicional, el profesor transmite y los alumnos escuchan, esto propicia que el alumno no sea protagonista de su aprendizaje, sino que se vea relegado a un papel secundario. Si el alumno es partícipe activo de su propio aprendizaje, será más fácil que construya su aprendizaje relacionando los conceptos y competencias ya adquiridas con los nuevos, fomentando un aprendizaje más significativo; este tipo de aprendizaje tiene ventajas respecto el aprendizaje tradicional, ya que puede llegar a favorecer la asimilación, motivación, adquisición de competencias del alumno.

No hay que desdeñar, que esta forma de favorecer el contrato didáctico, puede presentar ventajas, como: ayudar a mantener el orden en clase (roles definidos sin ambigüedad); mayor comodidad para el docente, favoreciendo la clase magistral y como ha sucedido en la práctica al no implantar propuestas innovadoras se evita un posible desconcierto inicial que las nuevas metodologías pueden implicar (Martínez, Muñoz, Oller 2014, p. 11)

Por otro lado, estos libros de texto se centran en la adquisición de saberes, entendidos estos como la información que los alumnos pueden reproducir y gestionar; se les transmiten las definiciones relativas a la proporcionalidad para que puedan identificar a qué tipo de problema se enfrentan y aplicar la fórmula correspondiente para resolverlo. Sin embargo, no se favorece la adquisición de conocimientos, es decir, información que el alumno puede manejar para enfrentarse a nuevos problemas.

Esto es especialmente evidente cuando los libros tratan las aplicaciones de la proporcionalidad (como son los porcentajes, repartos, interés simple y compuesto), dichas aplicaciones serían fácilmente accesibles para alumnos con una buena base de los conceptos básicos de la proporcionalidad (razón y proporción, proporcionalidad directa), pero dado al carácter memorístico y procedimental de los textos, sería difícil que los alumnos razonaran cómo afrontar estas aplicaciones. Los libros de texto solventan este posible problema mediante el estudio explícito de los distintos tipos de casos que se pueden dar, con sus correspondientes fórmulas. Como factores favorecedores de la adquisición de los saberes que intentan transmitir los libros estudiados estarían la sencillez, la claridad a la hora de ordenar las ideas, el respaldo de numerosos ejemplos y ejercicios para reforzar y manejar las técnicas.

En definitiva, se fomenta la adquisición de saberes, dejando al alumno que, de forma propia y si es capaz, adquiera ciertos conocimientos. Es más, muchas veces se dificulta la adquisición de conocimientos ya que el alumno no suele tener la necesidad de reflexionar por el carácter memorístico y procedimental que, en general, impregna todos los libros estudiados.

Por otro lado, la metodología presente en los libros, resulta contradictoria para lograr la adquisición y la mejora de la competencia matemática que quiere lograr la LOMCE, o la definida en PISA.

Ministerio de educación cultura y deporte:

La competencia matemática *implica la capacidad de aplicar el razonamiento matemático y sus herramientas para describir, interpretar y predecir distintos fenómenos en su contexto.*

Matemáticas liberados, informe PISA 2013:

La competencia matemática *es la capacidad para identificar y comprender el papel que las Matemáticas desempeñan en el mundo, realizar razonamientos bien fundados y utilizar e implicarse en las Matemáticas de manera que se satisfagan las necesidades de la vida del individuo como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo*.

Tampoco ayudan de forma significativa a desarrollar la competencia de *aprender a aprender*, esta competencia puede verse potenciada si se apuesta por una metodología donde el alumno sea más protagonista, teniendo que construir su propio conocimiento y afrontar de forma autónoma dificultades.

Otro punto a destacar, es el uso de graduaciones de dificultad en los problemas. En primer lugar, considero difícil establecer unos criterios conforme a los cuales catalogar los problemas (se tipifican en tres niveles de dificultad). En segundo lugar, aun asumiendo como correcta esta clasificación, si bien pudiera ayudar al profesor a la hora de mandar tareas adecuadas a cierto nivel deseado. Este hecho puede condicionar a los alumnos de múltiples formas:

- Predisponer a algunos alumnos a no afrontar los problemas que tienen mayor nivel de dificultad, o afrontarlos pensando que no van a ser capaces de resolverlos.

- A la hora de prepararse la prueba escrita no hacer los problemas más fáciles, pensando que si se saben resolver los difíciles serán capaces de resolver los fáciles

En los textos se suelen asumir hipótesis no fundamentadas, y en muchos casos arbitrarias. Por ejemplo, en el texto de Santillana en los problemas de interés si no especifica nada, se asumen de interés simple, por otro lado, en Anaya se asumen de interés compuesto.

En Santillana se presupone que los concejales obtenidos son directamente proporcionales a los votos (problema 49, pág 36), lo cual es falso, ya que la ley electoral vigente se basa en el sistema d'Hondt. También se presupone que el alumno tiene conocimientos de física al pedirle discernir si las relaciones entre presión atmosférica-altura, presión de un gas-volumen que ocupa, dioptrías-distancia son o no proporcionales.

En general, los problemas de los libros de texto analizados suelen ser poco originales y bastante artificiales. Lo que puede conllevar carencias y falsas suposiciones a la hora de entender los procesos de modelización matemática inherentes a los problemas de proporcionalidad.

Además, en muchos casos, el planteamiento del problema resulta trivial, ya que se suelen caracterizar los problemas según el contenido (proporcionalidad directa, interés simple, proporcionalidad…), con lo que los problemas se acaban siendo muchas veces meros ejercicios de refuerzo de las técnicas (uso de fórmulas) vistas.

Si bien, la propuesta didáctica de esta memoria va a romper con la metodología tradicional implícita en estos libros de texto. Opino que, por lo expuesto anteriormente, estos libros de texto se podrían mejorar en los aspectos negativos previamente mencionados, para que sean más consonantes con la adquisición de la competencia matemática que se pretende lograr en el actual marco legal educativo.

Dicho esto, todos los libros de texto analizados, me parecen plenamente funcionales. De fácil implementación en el aula.

Para concluir este estudio, cabe relacionar los resultados obtenidos con las conclusiones relativas al estado habitual de los procesos de enseñanza-aprendizaje de la proporcionalidad aritmética mencionados por distintos autores, a través del estudio de libros de texto de distintos cursos (Oller, 2012; Martínez, Muñoz y Oller, 2014; Martínez, Muñoz y Oller, 2015a). Señalan también:

1. La metodología utilizada en los textos se aleja de los presupuestos constructivistas de la LOMCE.
2. Existencia de un desequilibrio entre los conocimientos de tipo conceptual y los de tipo procedimental, a favor de estos últimos.
3. Despreocupación en el manejo de magnitudes
4. La proporcionalidad entre magnitudes es algo que se da casi por supuesto, reduciéndose los problemas a decidir si la proporcionalidad es directa o inversa
5. Ausencia de problemas de comparación
6. Escaso interés en la justificación de las técnicas
7. Preferencia por las técnicas puramente memorísticas

C. Conocimientos previos del alumno

La proporcionalidad se basa en la aritmética y su tratamiento puede verse reforzado con el álgebra y el análisis. El alumno ya dispone de los conocimientos aritméticos, algebraicos y analíticos para afrontar con soltura el tema de la proporcionalidad. Ya que estos tres aspectos han sido reiteradamente tratados a lo largo de los tres cursos anteriores.

Por otro lado, como mencionamos en la sección A, al nombrar la situación de la proporcionalidad aritmética en el currículo, los alumnos ya han trabajado este objeto matemático en el primer y segundo curso de la Educación Secundaria Obligatoria.

Además de que los estudiantes ya han trabajado conceptos de proporcionalidad con anterioridad, también cabe destacar que poseen un desarrollo cognitivo mayor que la primera vez que estudiaron la proporcionalidad aritmética. Cuarto de Educación Secundaria se corresponde con una edad 15-16 años, autores como Inhelder y Piaget (1955), García-Milá y Martí (2005), atribuyen a esta edad la consolidación del pensamiento formal, los alumnos poseen una mayor abstracción, su forma de razonar tiene un carácter hipotético-deductivo, formulan hipótesis que pueden contrastar para llegar a conclusiones válidas.

Con este nivel cognitivo, podremos trabajar la proporcionalidad desde un punto de vista más algebraico o analítico, para dar a los alumnos una perspectiva de la proporcionalidad en la que no solo relacionen este objeto con la aritmética, sino también, con el álgebra y el análisis. Lo cual puede ser difícil de abordar en cursos inferiores, incluso contraproducente para su aprendizaje.

Al hablar sobre los conocimientos previos de los alumnos, tenemos que mencionar que al haber estudiado previamente la proporcionalidad, todos sus conceptos derivados de la práctica docente que recibieron tendrán una repercusión directa en esta propuesta. Si bien, esto presenta ventajas, ya que el alumno ya está familiarizado con el tema en cuestión. Puede presentar ciertas desventajas, en particular que los alumnos estén influenciados por técnicas memorísticas que carecen de significado, como es la Regla de Tres. Dichas técnicas no serán consideradas como objetos a enseñar. Ya que los alumnos pueden incidir en errores al no saber el significado de las operaciones que realizan, por otro lado, las técnicas memorísticas pueden tener un carácter menos motivador para el alumnado y lo que considero más importante, este tipo de técnicas no favorecen la adquisición de la competencia matemática que se quiere lograr. Para enfrentarnos a este posible obstáculo didáctico, a la largo de la secuenciación didáctica se plantearan una serie de problemas que dificulten la aplicación de la Regla de Tres, cuyo objetivo será orientar a los alumnos para que sean ellos mismos quienes rehúsen usar este tipo de técnica puramente memorística.

Si bien, muchos de las nociones de la proporcionalidad aritmética serán familiares a los alumnos. Otros campos de problemas como los repartos, mezclas y aleaciones, intereses; pueden ser nuevos para los alumnos.

Dado que esta propuesta está dirigida a alumnos de cuarto de Educación Secundaria, no se considera oportuno realizar actividades destinadas a asegurar que los alumnos posean los conocimientos previos. Aunque las primeras sesiones tendrán una doble función, por un lado tratar los conceptos básicos de proporcionalidad vistos en los cursos anteriores, por otro, tendrán un carácter diagnóstico, que permita medir el grado de comprensión de dichos conceptos.

D. Razones de ser del objeto matemático

En los últimos siglos, la aparición de instituciones escolares y la obligatoriedad de asistir a ellas hasta cierta edad, ha hecho que se pase de una sociedad donde el aprendizaje se basaba en la endoculturación, a una sociedad donde la mayor parte del aprendizaje recae en las instituciones escolares.

Si antes las personas se enfocaban en desarrollar un aprendizaje de objetos de saber que les resultaban necesarios y útiles, hoy en día, la legislación marca en gran medida los contenidos que hay que impartir, los cuales pueden o no ser del agrado de los estudiantes. Por ello adquiere una gran importancia presentar dichos contenidos de una manera atractiva, que motive al alumno.

A este respecto, es fundamental la contextualización en la que se desarrollan los objetos que se pretenden enseñar. Para elegir dicha contextualización resulta muy interesante examinar cuál fue su génesis histórica que motivó a nuestros antepasados a desarrollar la Proporcionalidad Aritmética.

Los autores Oller y Garín (2015) estudiaron los contextos históricos que rodeaban a los problemas de proporcionalidad en textos previos al siglo XIV. El trabajo más antiguo en el que se presenta un problema de proporcionalidad es el papiro de Rhind, datado del siglo XVI a.n.e., en este papiro podemos encontrar problemas de repartos proporcionales y de valor perdido.

Otros textos históricos relevantes donde aparecen problemas de proporcionalidad son:

- *Jiu Zhang suan shu*, un texto comentado por el matemático chino Liu Hui, en el año 263, donde se comentan diversos métodos para la resolución de problemas generales.
- *Lilavati*, escrito en 1150 por el matemático indio Bhāskara II
- *Liber abaci*, escrito en 1202 por Fibonacci.

Dado que en muchas ocasiones de los problemas de proporcionalidad que se presentan solo figura su enunciado, estos autores optan por clasificar los problemas atendiendo a su contexto. Se distinguen cuatro tipos de contextos fundamentales:

1. Problemas de intercambio de mercancías, compra-venta, intercambio de divisa.
2. Problemas de repartos.

3. Problemas de préstamos.
4. Problemas de mezclas y aleaciones.

Si bien los contextos de las razones de ser históricas presentes en los libros de textos antiguos están alejados de la realidad del alumno, sus enunciados serán actualizados a un contexto más actual, manteniendo la esencia de los mismos. Las razones de ser de los campos de problemas derivaran de estos contextos históricos. Antes de enunciar los problemas que se establecerán como razones de ser, comentemos los aspectos metodológicos que se implementarán.

D.1. Metodología a seguir en su implementación en el aula

Además de presentar los problemas correctamente contextualizados, para la realización de la secuencia de actividades se procederá dando el máximo protagonismo posible al alumno, rehuyendo del estilo tradicional donde el profesor emite una información y los alumnos la reciben de forma pasiva. Para tratar esta secuencia, se han programado una serie de razones de ser bien estudiadas que tienen como objetivo que los alumnos sean capaces de construir por sí mismos los conocimientos, relacionándolos con los adquiridos previamente, tomar decisiones de manera autónoma y reflexionar sobre las conclusiones alcanzadas. Esta metodología intenta culminar en un aprendizaje más significativo por parte del alumno, el cual muchas veces se ve dificultado por el carácter memorístico de los libros de texto actuales.

Para conseguir los objetivos expuestos del párrafo anterior, siguiendo el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico, se plantean las siguientes fases que se pueden dar en los procesos de enseñanza y aprendizaje, los momentos de estudio.

- **Momento del primer encuentro**: los alumnos tienen la necesidad de elaborar nuevas técnicas y tecnologías para abordar un problema nuevo o un problema visto previamente, que se quiere resolver desde otro enfoque.
- **Momento exploratorio**: el alumno explora (de forma guiada por las actividades propuestas), que técnicas le permiten resolver las cuestiones planteadas en el primer encuentro. Se pretenderá dar el máximo protagonismo y libertad a los alumnos.
- **Momento de constitución del entorno tecnológico-teórico**: reflexionar sobre las técnicas adquiridas y que razones las sustentan.

- **Momento del trabajo de la técnica**: se busca que el alumno gane destreza, eficiencia, seguridad en el manejo de las técnicas. Si fuera necesario, que modifique las técnicas que ha aprendido.
- **Momento de institucionalización**: puesta en común de manera rigurosa (adaptada al nivel) de las técnicas y tecnologías vistas, generalmente por parte del docente.
- **Momento de evaluación**: se reflexiona sobre las limitaciones, posibles ampliaciones o aplicaciones de lo aprendido.

Estas fases, no tienen por qué suceder necesariamente en el orden presentado. A la hora de introducir las sesiones de la secuencia didáctica, se plantearán las razones de ser como momentos de primer encuentro, para que posteriormente los alumnos planteen métodos de resolución de forma autónoma, aunque dichos métodos estarán influenciados por la estructuración de las actividades, intentando que rehúsen utilizar métodos memorísticos como la conocida Regla de Tres. A lo largo de las actividades tendrán que reflexionar sobre las técnicas empleadas y las razones que las sustentan. Tampoco hay que menospreciar la importancia del momento del trabajo de la técnica, donde los alumnos se enfrentarán a una batería de problemas-ejercicios que les permitan pulir y asimilar las técnicas y tecnologías adquiridas.

Por último, en las sesiones habrá momentos de institucionalización, por parte del docente, o una puesta en común por parte de toda la clase. Esta fase es fundamental para aclarar las ideas y medir el grado de cumplimiento de los objetivos planteados en las sesiones.

A la hora de plantear a los alumnos las razones de ser, se sugiere que formen grupos de 2-4 personas. Considero enriquecedor que los alumnos dialoguen entre ellos verbalizando cuestiones matemáticas para construir de forma conjunta su aprendizaje, por otro lado puede ser más sencillo para un alumno entender un concepto matemático si se lo explica otro compañero; como desventajas, el trabajo grupal puede aumentar el ruido y dificultar mantener el orden en clase, pero en este sentido, la figura del docente como guía de las actividades puede ir interviniendo en los distintos grupos para mantener el orden.

Tampoco hay que despreciar plantear un trabajo completamente individual en algunas sesiones, para que los alumnos se afronten a éstas sin ningún tipo de ayuda.

D.2. Problemas que constituyen razones de ser de los distintos aspectos del objeto matemático

Razón de ser nº1: *Para preparar un aliño para ensalada, tomas como referencia las siguientes indicaciones de un libro de cocina:*

Para 100 ml de aliño:

Aceite	*60ml*
Vinagre	*30ml*
Soja	*10ml*

Este problema forma parte de la prueba PISA (2012). Solamente el 62,1% de los alumnos que realizaron la prueba consiguieron resolver el problema con éxito. Se preguntaba cuántos ml de aceite son necesarios para preparar 150 ml de aliño.

A partir de este problema se irán planteando cuestiones asociadas para recordar los aspectos de razón.

- *¿Qué significado tienen las siguientes cantidades* $\frac{60}{100}, \frac{30}{100}, \frac{10}{100}$*? ¿Cuánto suman las cantidades anteriores? ¿Qué explicación le das?*
- *Si quisiéramos preparar 1000 ml de aliño ¿Qué cantidades de aceite, vinagre y soja necesito?¿Expresa dichas cantidades dividiéndolas entre el aliño total?¿Qué relación guardan dichas fracciones con las del apartado anterior?*
- *¿Si quieres preparar 150 ml de aliño, qué cantidades de aceite, vinagre y suja necesitas? Expresa las cantidades en forma de fracción.*
- *¿Tienen algún significado en este problema los números 0.6, 0.3 y 0.1? ¿Podrías decir cuánto vale la razón entre el aceite y el aliño total para un aliño de 135 ml?*
- *¿Qué significado le das a la siguiente operación* $200\ ml\ aliño \cdot \frac{60}{100} \cdot \frac{ml\ aceite}{ml\ aliño} = 120\ ml\ aceite$*? ¿* $150\ ml\ aliño \cdot \frac{60}{100} \cdot \frac{ml\ aceite}{ml\ aliño} = 90\ ml\ \ aceite$*?*
- *Discute si un aliño formado por 51 ml de aceite, 8.5 ml de soja y 34 ml de vinagre sigue o no la receta.*
- *¿Qué sentido tiene decir que el 60% del aliño es aceite, el 30% es vinagre y el 10% soja?*

- *Si se prepara un nuevo aliño en el que el 55% del aliño es aceite. ¿Cuánto aceite habrá en 0,6 litros de aliño?*

Con esta razón de ser se introduce el campo de problemas CP1.3 y las técnicas y tecnologías asociadas a dicho campo.

Razón de ser nº2: *Una oveja come* $2\,m^2$*de un determinado prado en un día. ¿Cuantos* m^2*del prado comen 10 ovejas en un día? ¿Y 100 ovejas?*

¿Si el prado mide 50 m^2 *seguirán siendo ciertas las respuestas anteriores? ¿Qué condiciones habías supuesto para responder a las dos primeras preguntas?*

Con esta sencilla razón de ser se intenta inducir al alumno para que reflexione sobre las condiciones de regularidad (CP1.2).

Razón de ser nº3: *Se plantearán los siguientes problemas:*

1. *Jorge conduce a una velocidad constante. Al cabo de un rato se pregunta qué distancia ha recorrido al cabo de ciertos periodos de tiempo. Solo sabe que en 6 minutos ha recorrido 5 km. Completa la tabla:*

Horas conduciendo	*Km recorridos*
0,1	*5*
1	
	1
3	
	10
5	
6	

-¿Qué relación observas entre el tiempo conduciendo y la distancia recorrida?

-Representa gráficamente los datos anteriores

2. *Jorge quiere ir de Zaragoza a Huesca en coche. Suponiendo que la distancia de Zaragoza a Huesca es 70km. Completa la siguiente tabla que indica el tiempo que tarda Jorge según la velocidad a la que circula.*

Velocidad (en km/h)	*Tiempo (en horas)*
1	
	1
10	

	1
50	
100	
	2,5
	0,5

-¿Qué relación observas entre la velocidad y la duración del trayecto? Intenta explicarlo de la manera más precisa posible.

-Representa gráficamente los datos anteriores.

3. *Jorge ha ido anotando la relación entre su estatura y su peso en los últimos 5 años. Lo anota todos los años a finales del mes de enero.*

Año	*Altura (en m)*	*Peso (en kg)*
2014	*1,50*	*55*
2015	*1,55*	*60*
2016	*1,65*	*67*
2017	*1,67*	*72*
2018	*1,68*	*70*
2019		

-¿Qué relación observas entre la altura y el peso? Intenta explicarlo de la manera más precisa posible.

-Suponiendo que en 2019 a finales del mes de enero medirá 1,7m ¿Cuánto pesará?

4. *Una bodega de vino ajusta el precio de sus botellas según las botellas que produce de la siguiente manera:*

Botellas producidas (en miles)	*Precio una botella (en euros)*
1	*10*
2	*9,9*
3	*9,8*
5	*9,6*
10	*9,1*

-¿Qué relación observas entre las botellas producidas y el precio de una botella? Intenta explicarlo de la manera más precisa posible. Representa gráficamente los datos

-¿Cuál será el precio de la botella si se producen 11 mil botellas?

Con la razón de ser nº3, se introduce la idea de que los problemas de proporcionalidad aritmética se corresponden con un tipo particular de dependencia funcional (CP1.2). Que los alumnos afronten con éxito este problema está en gran parte condicionado por una correcta representación de los datos, por este motivo, se propondrá el uso de GeoGebra para representar los puntos de las tablas anteriores.

Razón de ser nº4:

Problema: *3 obreros instalan 60 farolas en un mes. ¿Cuántas farolas instala un obrero en un mes? ¿Cuántas farolas instalarán 4 obreros en un mes? Explica las condiciones de regularidad.*

Problema: *leyendo dos horas al día, Ana tarda 4 días en leer un libro. ¿Cuántas horas tendrá que invertir en leer el libro? Si lee una hora al día ¿Cuántos días tardará en leerse el libro? ¿Y si se quisiera leer el libro en un día cuánto tardaría? Explica las condiciones de regularidad.*

Se plantean los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple (CP2.1, CP2.2). Se intenta que a partir de las nociones aprendidas relativas al cálculo de constantes de proporcionalidad (CP1.3) sean capaces de resolver los problemas. Las preguntas pretenden reforzar que la técnica del paso a paso pasando por la unidad (T2.4) surja de forma natural en la siguiente razón de ser.

Razón de ser nº5:

Problema 1: *3 albañiles trabajando 8 horas al día cobran 240 euros. ¿Cuánto cobra un albañil trabajando 8 horas al día? ¿Cuánto gana un albañil por hora de trabajo? Cuánto cobrarán al día 2 albañiles que trabajan 6 horas diarias. Explica las condiciones de regularidad.*

Problema 2: *3 albañiles trabajando 8 horas al día tardan 90 días en construir una casa determinada. ¿Cuánto tardarían si trabajaran 5 albañiles 6 horas al día? ¿Qué podemos decir de una cuadrilla de albañiles que ha tardado 30 días en construir esa* *casa? ¿Tiene sentido decir que 300 albañiles trabajando 8 horas al día construirían esa casa en 0.9 días? Explica las condiciones de regularidad.*

Problema 3: *3 albañiles colocan 5 farolas en 15 horas. ¿Cuánto tardará 1 albañil en colocar 1 farola? ¿Cuántas horas necesitan 2 albañiles para colocar 3 farolas? Si una cuadrilla de albañiles ha tardado 45 horas en colocar 10 farolas ¿Cuántos albañiles tenía dicha cuadrilla?*

> Se plantean los tres casos que se pueden dar en situaciones de proporcionalidad compuesta con tres magnitudes (directa-directa, directa-inversa, inversa- inversa). Se pretende que surja la técnica del paso a paso pasando por la unidad, que será la técnica que se institucionalizará para abordar este tipo de problemas.

Razón de ser nº6: *Miguel fue de compras y vio las siguientes ofertas:*

- *Tienda A: "Si compras 3, te regalamos otro"*
- *Tienda B: "30% de rebaja"*
- *Tienda C: "Paga dos llévate tres (3x2)"*
- *Tienda D: "El segundo a mitad de precio"*

Calcula el % de descuento asociado a cada oferta. Reflexiona sobre en qué tienda comprarías suponiendo que el precio inicial de los productos que quieres comprar es el mismo.

> La razón de ser nº6 tiene una doble intención, por un lado, introducir los conceptos de descuentos ligados a un porcentaje; por otro lado, se pretende que los alumnos apliquen los conocimientos aprendidos para valorar otras formas de presentar los descuentos que se pueden dar en la vida real.

Razón de ser nº7: *El precio por un kg de naranjas en cierta frutería el año pasado era de 1.2€/kg en invierno, en primavera se incrementó un 10%, en verano se incrementó un 5 %, en otoño un 15% y este invierno ha bajado un 30%. ¿Cuánto cuesta el kilo de naranjas este invierno?*

> Se introducen los problemas de porcentajes sucesivos (CP4).

Razón de ser nº8: *Un vendedor de refrescos quiere instalar una máquina que cuesta 3000€ en un colegio. Para ello quiere pedir un préstamo de 3000€ a un banco. El vendedor tiene pensado saldar su deuda con el banco dentro de 1 año. Consultando dos bancos, valora las siguientes opciones:*

El primer banco le ofrece dicho dinero con unos interés mensuales del 5% sobre el precio del préstamo.

El segundo banco, le ofrece dicho dinero con unos interés mensuales del 4.5% sobre el precio del préstamo el primer mes, y posteriormente, sobre el dinero que debe al banco el mes anterior.

¿Qué préstamo le conviene más? ¿Y si la saldará dentro de 3 meses? Si la máquina le produce unos beneficios de 200 euros al mes. Cuál será su capital al final del año si la maquina se ha devaluado un 10% desde que la compró. Expresa en que porcentaje ha crecido su capital.

> Se introducen los problemas de interés simple e interés compuesto. El docente explicará todos los nuevos conceptos que susciten dudas (capital, préstamo, beneficio…)

Razón de ser nº9: *María, Eva, Daniel y Diana participan en una competición de tiro con arco, cada participante tiene tres flechas. María acierta 3, Eva acierta 1, Daniel acierta 2 y Diana no acierta ninguno. Hay un premio de 50 euros a repartir entre las personas según el número de aciertos. ¿Cuánto dinero le corresponde a cada uno?*

Razón de ser nº10: *Se concede una beca para ayudar a pagar el alquiler de 3000€ a un piso con tres estudiantes. Jorge, con unos ingresos de 200€/mes. Marta, con unos ingresos de 400€/mes. Alicia con unos ingresos de 300€/mes. ¿Cómo se deben repartir el dinero?*

> Con la razón de ser nº9 y nº10 se planteará el campo de problemas relativo a los repartos (CP5). El reparto inversamente proporcional es menos intuitivo que el reparto directamente proporcional, por ello, si el docente lo considera oportuno, dialogará con los alumnos para introducir la idea que si Marta gana el doble que Jorge, Marta debería recibir la mitad que Jorge, para hacer un reparto

justo, que equilibre la situación. Con esta idea no solo se introduce de forma implícita el significado de reparto inversamente proporcional, sino que además se sugiere una resolución algebraica, que es la técnica que se pretende institucionalizar.

Razón de ser nº11: *En una tienda venden una mezcla de cacahuetes, pistachos, maíz frito. El precio en euros por un Kg de los anteriores productos es de 14€/kg, 10€/kg, 7€/kg respectivamente. Para hacer la mezcla anterior se usan 3 Kg de cacahuetes, 5 de pistachos y 2 de maíz frito. ¿Cuánto cuesta un Kg de la mezcla?*

Mediante esta razón de ser se introducirán los campos de problemas relativos a las mezclas (CP6).

E. Campo de problemas

A continuación detallaremos los campos de problemas que se van a presentar en el aula. A la hora de abordar los problemas, serán los estudiantes quienes los resuelvan de manera autónoma, para poner a prueba lo aprendido en las razones de ser. La proporcionalidad aritmética esta intrínsecamente vinculada a la resolución de problemas, así pues, las razones de ser y el resto de problemas que se planteen en clase van a constituir el núcleo principal de trabajo. Para enfrentarse a los problemas los estudiantes alternarán entre el trabajo en grupos de 2-4 personas y el trabajo en solitario.

Considerando los ejercicios como tipos de problemas que trabajan las técnicas de manera aislada, resultan bastante descontextualizados en la proporcionalidad aritmética; además no hay que olvidar que los criterios y estándares de evaluación reflejados en el currículo están orientados hacia la resolución de problemas en situaciones de la vida cotidiana. Dicho esto, la forma de trabajar las técnicas será mediante problemas. Solo habrá ejercicios relativos a la técnica del “paso a paso pasando por la unidad”, se detallarán en la sección F, relativa a las técnicas. Campos de problemas:

CP1. Análisis de situaciones de proporcionalidad

Si bien este campo de problemas trata los aspectos más básicos de la proporcionalidad aritmética, nociones que ya deberían manejar con soltura después de haber estudiado la proporcionalidad en dos de los tres cursos anteriores. Esto no siempre es así, y dado que estos aspectos suponen la base de la proporcionalidad, merece la pena dedicar una sesión en trabajarlos.

CP1.1. Identificación de magnitudes

Son problemas dirigidos a que los alumnos recuerden la diferenciación entre una variable de una magnitud y otra variable que no es magnitud (no tiene sentido plantearnos su medida).

Problema 1.1.1: *El día 1 de un determinado mes un obrero instala en el piso nº5 de una determinada calle, 10* m^2 *de azulejos en 2 horas a las 17:00 de la tarde. ¿Cuántos azulejos instalará el día 5, si trabaja 4 horas?*

CP1.2. Problemas asociados a reflexionar qué tipo de dependencia existe entre las variables

Se estudiará las relaciones que pueden tener dos o más variables, en general, magnitudes. Sean $X_1, \dots, X_n$ dichas variables puede tener una relación funcional o no. Si hay una relación funcional tenemos que:

$$f(X_1, \dots, X_n) = z$$

Si z se mantiene constante y la función es de la forma $f(X_1, \dots, X_n) = \prod_{i=1}^{n} X_i^{p_i} = cte$, con $p_i \in \{-1,1\}$ se trata de una relación de proporcionalidad, poniendo un ejemplo con dos variables:

X_1	a_1	a_2	a_3	...
X_2	b_1	b_2	b_3	...

Si hay una relación de proporcionalidad, entonces $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \cdots = k$ para el caso de proporcionalidad directa, o bien $a_1b_1 = a_2b_2 = a_3b_3 = \cdots = k$ para el caso de proporcionalidad inversa.

También se incluyen en este campo de problemas variables para las cuales no existe ningún tipo de relación, hay una relación entre variables aleatorias, o existe otro tipo de relación funcional no lineal. Este tipo de problemas tiene como objetivo que el alumno sea capaz de reflexionar sobre cuando las magnitudes que intervienen en los problemas son o no son proporcionales.

Considerando la base analítica que tienen los alumnos se reflexionará sobre el hecho de que la proporcionalidad directa e inversa se puede ver como una función lineal e hiperbólica, respectivamente. Para facilitar esta idea, se propondrá una actividad con GeoGebra en la que los alumnos puedan enfrentarse a este concepto de una manera menos abstracta.

En este campo de problemas, también se reflexionará sobre las **condiciones de regularidad**, para que la proporcionalidad entre las magnitudes se mantenga, se requiere asumir que la constante de proporcionalidad va a ser invariante independientemente del valor de las magnitudes. Esto requerirá asumir ciertas hipótesis, llamadas condiciones de regularidad.

Por ejemplo, si 3 obreros tardan 2 días para construir un muro, hay que suponer que todos los obreros trabajan con la misma eficacia y las mismas horas al día, que el número de obreros no influye en la eficiencia de los obreros.

Problema 1.2.1: *Identifica las condiciones de regularidad en los siguientes problemas. Resuélvelos.*

- *Un grifo llena una piscina en 1 hora, ¿cuánto tardarían 2 grifos?*
- *Un camión transporta 2 toneladas, ¿cuántos camiones se necesitan para transportar 6 toneladas?*
- *Un empresario paga 50 euros a un trabajador en un día, ¿cuánto le costarán 3 trabajadores?*
- *Un leñador obtiene 1 tonelada de madera trabajando 2 horas al día durante 1 semana. ¿Cuántos kg de madera obtiene en una hora?*

CP1.3. Cálculo de razones y constantes de proporcionalidad

Dadas dos magnitudes que se relacionan de forma directamente proporcional, dados dos valores a, b de dichas magnitudes, la razón $\frac{a}{b}$ significa que por cada a unidades de la primera magnitud se tienen b unidades de la segunda. Por otro lado, también se planteará la razón como "tanto por uno", siguiendo en este caso la línea marcada por Martínez, Muñoz, Oller y Pecharromán (2014).

La razón como "tanto por uno" se interpreta de la siguiente forma: si realizáramos la operación $\frac{a}{b}$ de la fracción asociada a la razón anterior, expresando el resultado mediante un número decimal, dicho número se puede interpretar como la cantidad de la primera magnitud que se corresponde por cada unidad de la segunda magnitud.

En este campo de problemas estarán también problemas relativos a la interpretación de porcentajes, entendiendo la razón como "tanto por uno", se puede pasar de forma natural al "tanto por ciento", lo que ayudara a introducir los porcentajes.

Problema 1.3.1: *Marta compra a granel 200 g de patatas fritas por 1,7 euros. ¿A cuánto le sale el kilo de patatas fritas? ¿Cuántas patatas puede comprarse con 1 euro? ¿Cuánto dinero le costaría 1,5 kg de patatas fritas?*

Problema 1.3.2: *Calcula:*

- *La razón entre el número de chicas y el número total de personas. Si en la clase hay 13 chicas y 12 chicos.*
- *El 20% de 600 €*

- *El 53% de 234 kilómetros*

Problema 1.3.3: *Calcula:*

- *Cuántos segundos hay en un año. Supón que un año tiene 365,25 días.*
- *Cuántos kilómetros son 15353 cm.*
- *Cuántos euros son 100 dólares. Supón que 1€ =1,2 dólares.*

Problema 1.3.4: *Ricardo y Eva han comprado en el mismo supermercado el mismo tipo de huevos. Ricardo dice que media docena le han costado 1,2 euros. Por otro lado Eva dice que se ha gastado 4,8 euros en 2 docenas. ¿Cuánto le ha costado cada huevo a cada uno? José, quien también ha comprado en ese supermercado el mismo tipo de huevo, les dice que le cuesta 15 céntimos la unidad. ¿Dice la verdad?*

CP2. Problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad

En este campo abordaremos los problemas en los que se quiere hallar un valor desconocido, a partir de cierta relación de proporcionalidad. Dadas $n+1$ variables, que mantienen una dependencia de proporcionalidad. Conocida una tupla de esas $n+1$ variables, se trata de hallar un valor desconocido en una variable de cierta n-tupla. Sean $X_1, \dots, X_n$ las variables las cuales se conocen todos sus valores, sea X la variable para la que desconocemos un valor, tenemos que:

$$f(X_1, \dots, X_n, X) = k, \text{ con } k \text{ constante de proporcionalidad.}$$

Se relacionan de forma proporcional, es decir, la función es de la forma:

$$f(X_1, \dots, X_n, X) = X \cdot \prod_{i=1}^{n} X_i^{p_i} = cte, \text{ con } p_i \in \{-1,1\}$$

Si la variable X_i, interactúa de forma directamente proporcional respecto la variable X entonces $p_i = -1$, por otro lado, si interactúa de forma inversamente proporcional $p_i = 1$.

Para n=1, tendríamos la proporcionalidad simple (directa o inversa); para n=2, se trataría de proporcionalidad compuesta (directa-directa, directa-inversa o inversa-inversa), se puede generalizar a un número arbitrario de n variables, donde cada variable puede actuar de forma inversa o directa.

Ejemplificando con un problema típico de proporcionalidad:

Sean 3 obreros, que al trabajar 4 horas al día tardan 2 semanas en construir un edificio. ¿Cuánto tardarían 2 obreros que trabajan 6 horas al día en construir dicho edificio? (n=2)

X_1 ↓	X_2 ↓	X ↓
3	4	2
2	8	x

Tenemos que, $f(3,4,2) = 24$ y $f(2,8,\ x) = 24 \iff 3 \cdot 4 \cdot 2 = 2 \cdot 6 \cdot x \Leftrightarrow x = 4/3 = 1,\hat{3}$

Para mayor claridad a la hora de abordar los distintos tipos de problemas de valor perdido en la secuenciación didáctica, haremos la siguiente distinción.

CP2.1. Valor perdido en proporcionalidad simple directa

Problemas de valor perdido entre dos magnitudes directamente proporcionales. En este apartado se incluyen problemas del cálculo de un porcentaje de cierta magnitud.

Problema 2.1.1: *Juan y María se han gastado parte del dinero que les dio su abuela. Si a Juan le queda el 75% del dinero que son 3 euros. ¿Cuánto dinero tenía al principio? Por otro lado, María ha gastado el 20% del dinero que es 1 euro. ¿Cuánto dinero le dio su abuela?*

Problema 2.1.2: *Comenta si son directamente proporcionales las relaciones que se establecen en los siguientes casos.*

a) La distancia recorrida y la velocidad
b) El salario mensual y la edad
c) La altura y la edad
d) El número de votos y la cantidad de diputados en unas elecciones en España

CP2.2. Valor perdido en proporcionalidad simple inversa

Problemas de valor perdido entre dos magnitudes inversamente proporcionales.

Problema 2.2.1: *Di si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones*

a) *El número de grifos con el mismo caudal y el tiempo en que tardan en llenar una piscina son inversamente proporcionales.*
b) *El número propinas que obtiene un camarero y el tiempo que tarda en realizar una comanda son inversamente proporcionales. Ya que cuánto menos tiempo tarde en servir a los clientes más propinas recibirá de estos.*
c) *La velocidad de un coche y el tiempo que tarda en recorrer una distancia es inversamente proporcional*

Problema 2.2.2: *Eduardo tarda 140 minutos en ir desde Zaragoza a Calamocha a 45 Km/hora. ¿Cuántos minutos tarda si ahora circula a una media de 2000 metros por cuarto de hora?*

Problema 2.2.3: *Juan se ha ido de vacaciones a Granada, si gasta 20 euros diarios tiene dinero para estar 15 días. ¿Cuánto puede gastar cada día si ahora decide estar 20 días en vez de 15 días? Y si por el contrario gasta 30 euros diarios, ¿Cuántos días podrá estar en Granada?*

CP2.3. Valor perdido en proporcionalidad compuesta

Problemas de más de dos magnitudes que mantienen una relación de proporcionalidad.

Problema 2.3.1: *3 grifos abiertos 12 horas al día gastan 10€ de agua al día. ¿Cuánto dinero gastarán si se añade un grifo más y se dejan abiertos 15 horas al día? ¿Si un metro cúbico cuesta 1 €, cuantos litros totales habrán gastado los grifos?*

Problema 2.3.2: *tres pintores tardan 2 días en pintar la fachada de una casa, trabajando 8 horas al día. ¿Cuánto tardarían 5 pintores que trabajan 6 horas al día?*

Problema 2.3.3: *Una carpintería recibe un encargo para elaborar 300 sillas iguales. Si han estado 2 carpinteros 6 horas al día durante 3 días y han elaborado 10 sillas con un coste total de 400 euros. ¿Cuánto van a costar las 300 sillas? ¿Cuánto costaría el trabajo de 4 carpinteros 4 horas al día durante 5 días? ¿Qué proporción del encargo lograrían realizar?*

Problema 2.3.4: *Un granjero necesita 700 Kg para alimentar a sus 20 vacas durante 10 días. Intercambia con otro granjero 5 vacas por 7 cerdos. Si para* *alimentar a las 15 vacas restantes y a los 7 cerdos durante 5 días gasta 400 Kg. ¿Cuánta comida consumen las 15 vacas en 5 días? ¿Cuánto comida consume una vaca al día?*

CP3. Problemas de comparación en situaciones de proporcionalidad

Otro campo de problemas está formado por aquellas situaciones que requieren comparar situaciones de proporcionalidad, para tomar una decisión sobre qué situación es más ventajosa. Consideramos las siguientes $n+1$ magnitudes $X_1, \dots, X_n, X$; de las cuales conocemos sus valores en dos o más situaciones de proporcionalidad distintas (conocemos dos o más tuplas diferentes). Se quiere elegir la situación (tupla) más conveniente, dependiendo del contexto del problema, tendremos que elegir la tupla que hace máximo o mínimo el siguiente valor:

$$C(X_1, \dots, X_n, X) = \frac{X}{\prod_{i=1}^{n} X_i^{p_i}}$$

Con $p_i \in \{-1,1\}$, dependiendo si la relación entre X_i y X es directa o inversamente proporcional.

Ejemplo: *Los 7 ordenadores de la oficina A funcionan durante 5 horas al día, cada 15 días la oficina gasta 20 euros en electricidad para mantener los ordenadores. Por otro lado, otra oficina B que tiene 5 ordenadores los cuales funcionan durante 8 horas al día, se gasta 50 euros cada 30 días. Suponiendo que la tarifa eléctrica es la misma, ¿Qué ordenadores son más baratos de mantener?*

Suponiendo que todos los ordenadores consumen la misma electricidad por hora de funcionamiento. Calculemos el coste por hora de un ordenador en cada situación:

	Ordenadores	Horas	Días	Coste
Oficina A	7	5	15	20
Oficina B	5	8	30	50

$$C(7,5,15,20) = \frac{20}{7 \cdot 5 \cdot 15} = 0{,}03809$$

$$C(5,8,30,50) = \frac{50}{5 \cdot 8 \cdot 30} = 0{,}04166$$

Respuesta: los ordenadores de la Oficina A son más baratos de mantener.

El ejemplo anterior es un **problema de comparación cuantitativo**, también pueden aparecer **problemas de comparación cualitativos**:

Ejemplo*: El porcentaje de azúcar por litro de refresco es menor en el refresco A que en el B. Además el refresco B es mayor que el A. ¿Qué refresco tendrá más cantidad de azúcar?*

Problema 3.1: *Alicia, Pedro y Juan quieren ir al cine. Alicia dice que en los cines cercanos a su casa pagó hace poco 14 euros por tres entradas. Por otro lado, Juan comenta que en otros cines, la semana pasada, le costaron 22 euros 5 entradas. Suponiendo que quieren ir al cine más barato. ¿A qué cine deberían ir?*

Problema 3.2: *Pedro riega las plantas de su jardín con una garrafa de 5 litros. El grifo de su cocina tarda 1 minutos en llenar una botella de 2 litros. La manguera de su jardín llena la garrafa de 5 litros en 3 minutos. ¿Qué grifo tarda menos en llenar la garrafa de 5 litros?*

Problema 3.3: *Una cuadrilla de 5 obreros tarda 3 días trabajando 8 horas al día en construir una piscina. Otra cuadrilla de 4 obreros tarda 5 días trabajando 7 horas diarias en construir el mismo tipo de piscina ¿Qué cuadrilla es más rápida?*

Problema 3.4*: La tarta A esta más dulce que la tarta B. Si añadimos más azúcar a la tarta B y menos azúcar a la tarta A ¿Cual estará más dulce?*

Problema 3.2: *Jorge tarda 15 minutos en ir a la escuela. Guillermo, viviendo más lejos, tarda 5 minutos más que Jorge. ¿Quién de los dos es más rápido?*

CP4. Porcentajes sucesivos

Se introducen los problemas donde los porcentajes se van aplicando de forma reiterada. Dado una magnitud que tiene cierto valor inicial x, dicho valor aumenta o disminuye un P_i% un número n de veces. Queremos hallar el valor final, después de haber aplicado todos los aumentos/disminuciones porcentuales:

$$\text{Valor final} = \text{x} \cdot \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{100+P_i}{100}\right), \text{ con } P_i \in [-100, \infty)$$

Problema 4.1: *Alicia está pensando en irse de viaje a EE.UU. mirando vuelos, hay uno por 500€, la semana siguiente vuelve a mirar y observa que ahora cuesta 600€ ¿Qué porcentaje se ha incrementado el vuelo? Pasada otra semana se decide a* *comprar el vuelo, y el precio es un 20% menos que la semana pasada. ¿Cuánto paga por el vuelo?*

Problema 4.2: *Juan es el dependiente de una tienda de ropa. Para atraer clientes sin gastar dinero Juan sube el precio de su ropa un 30% durante 3 días, posteriormente lo baja un 30% para poner en el escaparate que su ropa tiene un descuento de un 30%. ¿Qué le dirías a Juan?*

Problema 4.3: *Juan crea una cuenta en el banco e ingresa 6000 €. El banco le da un 3% de intereses anuales, respecto a la cantidad que tenía el año pasado. ¿Cuánto beneficio obtendrá en dicha cuenta al cabo de 6 años? Si Juan recogiera los intereses de su dinero cada año. ¿Cuánto dinero habría ganado al cabo de 6 años?*

CP5. Repartos proporcionales

Se tiene una cantidad de cierta magnitud que se quiere repartir de forma proporcional. Se distinguen dos casos.

CP5.1. Repartos directamente proporcionales

Se quiere repartir la magnitud de forma proporcional a las participaciones de las partes involucradas. Es decir, dada una magnitud x a repartir entre n partes. Siendo y_i la participación de la i-ésima parte. La cantidad de x que le corresponde a la i-ésima parte es $\frac{y_i}{\sum_{i=1}^{n} y_i} \cdot x$.

Problema 5.1.1: *María, Jorge y Ana han comprado un boleto de lotería y han puesto 5, 3,7 euros respectivamente. Si el boleto resulta premiado con 1000 euros, ¿Cómo deberían repartirse el dinero?*

CP5.2. Repartos inversamente proporcionales

Se quiere repartir la magnitud de forma inversamente proporcional a las participaciones de las partes involucradas. Es decir, dada una magnitud a repartir x entre n partes. Siendo x_i la participación de la i-ésima parte. Se trata de repartir x de forma directamente proporcional entre n partes, siendo x_i^{-1} la participación de la i-ésima parte.

Problema 5.2.1: *Jaime, Raquel y Juan reciben una herencia. Sus salarios mensuales son de 1000, 1500 y 2000 euros, respectivamente. Se quiere repartir 50.000 euros de tal manera que el reparto equilibre la situación salarial.*

A la hora de introducir estos problemas en el aula, se seguirá la idea de Martínez, Muñoz, Oller y Pecharromán (2014) en el sentido de que los repartos directos intentan reflejar la situación, cada participante recibe una parte del total proporcional a su participación. Mientras que los repartos inversos intentan equilibrar la situación, cada participante recibe una parte del total inversamente proporcional a su participación, es decir si el primer participante tiene el doble de participación que el segundo, el primero recibiría la mitad de la cantidad que haya recibido el segundo.

CP6. Mezclas y aleaciones

Si se tienen dos o más productos de una misma magnitud (kilogramos, litros,…) al juntar dichos productos obtendremos una mezcla. Si cada producto tiene un valor específico de otra magnitud (euros, kilogramos,…) se trata de hallar el valor o la magnitud de uno de los productos o de la mezcla total.

Problema 6.1: *se mezclan 30 kg de un pienso A que vale 0,7 €/kg con 10 kg de un pienso B que vale 1,5 €/kg. Calcula el valor de un kilogramo del pienso resultante de hacer la mezcla anterior. Con los datos anteriores, si se desconociera la cantidad de pienso del tipo B en la mezcla, pero se supiera que el precio de la mezcla es de 1 €/kg. ¿Qué cantidad de pienso B se ha utilizado para hacer la mezcla?*

Problema 6.2: p*ara hacer un zumo de sabor Lima-Limón se hace una mezcla de ambos zumos donde el zumo de limón es el doble que el de lima. Sabiendo que el zumo de lima cuesta la mitad que el de limón y este vale 1,5 €/litro. ¿Cuánto cuestan 200 ml de Lima-Limón?*

Si bien es cierto que los problemas de aleaciones han supuesto una de las razones de ser históricas en este campo de problemas. Considero las aleaciones demasiado alejadas del contexto social actual de los alumnos. Por lo tanto, en la secuenciación didáctica solo se presentarán problemas relativos a mezclas para abordar este campo de problemas.

F. Técnicas

En esta sección comentaremos las técnicas que permiten resolver los campos de problemas de la sección anterior. Se tratarán la mayoría de técnicas que permiten abordar los distintos tipos de problemas de proporcionalidad aritmética, aunque por cuestiones didácticas y la limitación de tiempo no se institucionalizarán todas las técnicas expuestas.

El diseño de las razones de ser intenta dirigir a los alumnos hacia unas determinadas técnicas. Serán estos quienes construyan dichas técnicas al enfrentarse a la resolución de las distintas razones de ser. El docente, después de haber dejado el tiempo necesario para que los alumnos desarrollen sus praxeologías, tendrá una labor institucionalizadora de las técnicas. Esta institucionalización conviene que surja de las producciones de los alumnos, se les preguntará cómo han resuelto los ejercicios y se establecerá un dialogo sobre las técnicas que han empleado, esto le permitirá al docente elegir el método de resolución que se considere más idóneo, clarificar la técnica, evitar posibles errores a la hora de aplicar dicha técnica y asegurarse que toda la clase comprende la técnica.

A continuación se expondrán las diversas técnicas. Si un campo de problemas tiene más de una técnica se especificará que técnica se institucionalizará. Para la catalogación de las técnicas se ha tomado como referencia la notación de Martínez, Muñoz, Oller (2015b), donde se examinan las diferentes estrategias que emplean los alumnos para resolver problemas de proporcionalidad compuesta.

T1. Técnicas asociadas al análisis de situaciones de proporcionalidad

T1.1. Técnicas asociadas a la identificación de magnitudes

Identificar todas las variables que influyen en el problema. Plantearse si dichas variables son o no magnitudes, si se pueden medir o no.

T1.2. Técnicas asociadas a problemas asociados a reflexionar que tipo de dependencia existe entre las variables

Se plantearán varias preguntas que serán contestadas por el contexto del problema o mediante el estudio de las relaciones que se dan entre los pares de magnitudes. Una vez contestadas se sabrá qué tipo de dependencia existe entre las variables.

1. ¿Tenemos **condiciones de regularidad**?

Ver que hipótesis se tienen que cumplir para que las magnitudes se puedan relacionar de la misma forma independientemente del valor de cada magnitud.

2. ¿Se pueden relacionar en algún sentido las magnitudes?

Si aumenta o disminuye una magnitud, las otras magnitudes se ven necesariamente afectas.

3. ¿Se trata de una proporcionalidad directa?

Ver si las magnitudes cumplen la definición de proporcionalidad directa, por ejemplo, comprobar que si una magnitud aumenta el doble, triple… La otra magnitud aumenta respectivamente el doble, triple…

4. ¿Se trata de una proporcionalidad inversa?

Ver si las magnitudes cumplen la definición de proporcionalidad inversa.

5. ¿Se trata de otro tipo de dependencia funcional?

Hay una dependencia funcional, pero no es de proporcionalidad.

T1.3.Técnicas asociadas al cálculo de razones

Las técnicas empleadas en el cálculo de razones se desprenden directamente de la definición de razón como "tanto por uno".

Razón como "tanto por uno": Sea la razón $\frac{a}{b}$ entre dos magnitudes, no necesariamente distintas, $\frac{a}{b}$ representa que al tener a unidades de la primera magnitud, se tienen b unidades de la segunda magnitud. Por otro lado, la razón como "tanto por uno" se entiende como la cantidad de la primera magnitud que se corresponde con una unidad de la segunda magnitud, es decir, $\frac{a}{b}$ se considera ahora como un número. Se intentará que surja esta definición de manera natural a partir de la razón de ser nº1, relacionada con problemas de intercambio.

Razón como "tanto por ciento": Nos permite enfrentarnos a problemas de porcentajes de manera sencilla, ya que esta técnica se correspondería con una variación de la razón como "tanto por uno", ahora se considera la cantidad de la primera magnitud que se tiene por cada 100 unidades de la misma magnitud.

T2. Técnicas asociadas a problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad

Este problema servirá de ejemplo para ilustrar las diversas técnicas que se tratan a continuación: *3 albañiles trabajando 8 horas al día cobran 240 euros al día. Cuántas horas habrán trabajado 2 albañiles si han cobrado 100 euros ese día.*

T2.1. Mediante el uso de la Regla de Tres: se disponen los datos en forma de tabla, se reflexiona sobre si la proporcionalidad es directa o inversa, se aplica la fórmula memorizada para cada caso.

Por lo comentado en secciones anteriores, esta técnica no será objeto de estudio. Las cuestiones y estructura de las razones de ser intentan que los alumnos resuelvan los problemas de valor perdido con otro tipo de técnicas, pero si un grupo significativo de alumnos resuelve los problemas por este método memorístico, el docente explicitará los aspectos negativos de este tipo de técnicas para intentar que los propios alumnos decidan no usarla.
Con el ejemplo anterior:

Albañiles	Salario diario	Horas diarias
3	240	8
2	100	x

Teniendo en cuenta que el número de albañiles es inversamente proporcional al número de horas diarias trabajadas y que la cantidad del salario diario es directamente proporcional al número de horas diarias. Tenemos que:

$$x = \frac{3 \cdot 100 \cdot 8}{2 \cdot 240} = 5 \text{ horas diarias}$$

T2.2. Proporciones: se plantea la igualdad de razones que se tiene que cumplir entre las magnitudes y se despeja el valor perdido de forma algebraica. Aunque en el caso de la proporcionalidad simple puede ser más o menos intuitivo, para la proporcionalidad compuesta resulta más difícil dar una justificación y acaba pareciéndose a la técnica anterior.

Por lo tanto, con dos o más magnitudes, para problemas de proporcionalidad compuesta, no se institucionalizará el método de proporciones. Para abordar los problemas de proporcionalidad compuesta con este método de una manera más justificada, se podría aplicar la técnica de amalgamación T2.3, con lo que se consigue reducir el problema de proporcionalidad compuesta a uno de proporcionalidad simple donde se podría aplicar el método de proporciones a dos magnitudes. Aunque no siempre se le puede dar un sentido al método T2.3.

En el ejemplo anterior: se plantean la proporción atendiendo a si las magnitudes intervienen de forma directa o inversamente proporcional, se despeja el valor perdido algebraicamente.

$$\frac{8}{x} = \frac{3}{2} \cdot \frac{100}{240}$$

T2.3. Amalgamación de magnitudes: en el caso de la proporcionalidad compuesta, se trata de reducir el problema inicial a otro problema equivalente de proporcionalidad simple.

En el ejemplo anterior: si dividimos el salario diario entre el número de trabajadores obtenemos cuánto gana un trabajador. Podemos plantear el problema de la siguiente forma: *Un albañil cobra 80 euros por un día de trabajo si trabaja 8 horas. ¿Cuántas horas trabajara un albañil que ha ganado 50 euros?*

Albañiles	Salario diario	Horas diarias
3	240	8
2	100	x

Salario diario de un albañil	Horas diarias de trabajo
80	8
50	x

El profesor comentará e institucionalizará esta técnica si surge de manera natural por parte de los alumnos. Esto se debe a que en determinados contextos puede ser complicado dar un sentido a la amalgamación de magnitudes, se detallara este hecho con un ejemplo en la sección G relativa a las tecnologías. La técnica que nos permitirá resolver un problema arbitrario de proporcionalidad compuesta será la técnica T2.4.

T2.4. Paso a paso pasando por la unidad: también conocido como el método de reducción a la unidad, se trata de dividir el problema en varios pasos, en cada uno de esos pasos hay que resolver un problema de valor perdido de proporcionalidad simple. Primero se calculan los pasos necesarios para expresar cuanta cantidad de la magnitud que queremos hallar se corresponde con una unidad de las demás magnitudes, posteriormente se multiplican las magnitudes hasta que coincidan con la tupla para la cual se quiere hallar el valor perdido. También se puede utilizar el método del paso a paso directamente, sin pasar por la unidad.

En el ejemplo anterior:

Albañiles	Salario diario	Horas diarias
3	240	8
2	100	x

$$3\ albañiles\ -240\ salario\ -8\ horas$$

$$1\ albañiles\ -80\ salario\ -8\ horas$$

$$1\ albañiles\ -10\ salario\ -1\ horas$$

Tenemos que un albañil cobra a 10 euros la hora. Luego:

$$1\ albañiles\ -50\ salario\ -5\ horas$$

$$2\ albañiles\ -100\ salario\ -5\ horas$$

Dado que esta es la principal técnica en problemas de proporcionalidad compuesta, se considera oportuno plantear algún ejercicio que la refuerce, como el siguiente:

Ejercicio 2.4.1: *Halla el valor de x suponiendo que la primera magnitud es directamente proporcional a la tercera y la segunda es directamente proporcional a la tercera (haz los mismo para los casos inversa-directa e inversa-inversa):*

$$7\ -56\ -3$$

$$2-25\ -x$$

T3. Técnicas asociadas a problemas de comparación en situaciones de proporcionalidad

En el caso de problemas de **comparación cuantitativa:** dando significado a las operaciones por el contexto del problema calculamos el valor de $C(X_1, \dots, X_n, X) = \frac{X}{\prod_{i=1}^{n} X_i^{p_i}}$ con $p_i \in$ {-1,1}, para cada tupla dada. Y escogemos el mayor o menor valor según el contexto del problema.

En el caso de problemas de **comparación cualitativa:** leyendo cuidadosamente el problema, ir viendo cómo se modifican las cualidades que nos piden conforme las hipótesis del enunciado se van sucediendo.

T4. Técnicas asociadas a porcentajes sucesivos

T4.1. Primera técnica: dividir el problema en tantas etapas como el número de distintos porcentajes que intervienen. Calcular en cada etapa el porcentaje correspondiente a la cantidad de la etapa anterior.

T4.2. Segunda técnica: variación de la técnica anterior, calcular directamente el valor final $= \text{x} \cdot \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{100+P_i}{100}\right)$. Donde x es la cantidad inicial.

T5. Técnicas asociadas a repartos

T5.1. Reparto directo: dividir la magnitud total a repartir entre la participación total, suma de todas las participaciones. Se obtiene cuanta cantidad de la magnitud a repartir se corresponde por una unidad de participación (razón como "tanto por uno"). Posteriormente calcular la cantidad que le corresponde a cada participante a partir de esa razón.

Ejemplo: *María, Jorge y Ana han comprado un boleto de lotería y han puesto 5, 3,7 euros respectivamente. Si el boleto resulta premiado con 1000 euros, ¿Cómo deberían repartirse el dinero?*

Primero vemos cuanta ha sido la participación total y de cada uno:

El boleto ha costado 5+3+7=15 euros.

Por lo tanto, tenemos que por cada euro puesto por cada participante le corresponden, $\frac{1000}{15} = 66,\hat{6}$ *euros.*

María ha puesto 5 euros, le corresponden $5 \cdot 66,\hat{6}$ *euros, a Jorge* $3 \cdot 66,\hat{6}$ *euros y a Ana* $7 \cdot 66,\hat{6}$ *euros.*

Una variación de la técnica anterior sería, calcular el porcentaje de participación de cada participante a partir de la participación total:

María ha puesto 5/15=1/3 del valor del boleto y se debe llevar 1/3 del valor del premio.

Jorge ha puesto 3/15 del valor del boleto y se debe llevar 1/5 del premio.

Ana se llevara el resto del premio, 7/15 del mismo.

T6. Reparto inverso: Resolución algebraica: Atribuir una cantidad arbitraria a uno de los participantes mediante una incógnita, establecer las relaciones de proporcionalidad inversa correspondientes. Resolverlo como si fuera un problema de valor perdido de proporcionalidad inversa.
Ejemplo: *Jaime, Raquel y Juan reciben una herencia. Sus salarios mensuales son de 1000, 1500 y 2000 euros, respectivamente. Se quiere repartir 50.000 euros de tal manera que el reparto sea inversamente proporcional al salario de sus sueldos.*

Sea x *la cantidad que le corresponde a Jaime en el reparto, Juan que gana el doble recibirá la mitad, es decir* $\frac{x}{2}$*; Raquel gana* $\frac{1500}{1000}$ *veces más que Jaime, luego recibirá* $\frac{x}{1,5}$*. Tenemos que la suma de cada una de las partes es igual al total a repartir:*

$$x + \frac{x}{2} + \frac{x}{1,5} = 50000$$

Despejando x=23076,9230. Luego Jaime recibe 23076,92 euros, Raquel 15384,61 euros, Juan recibirá 11538,46 euros.

T7. Técnicas asociadas a problemas de mezclas y aleaciones

Atendiendo a la contextualización del problema se calcularán diversos datos:

- Magnitud total de la mezcla
- Valor total de la mezcla
- Razón como “tanto por uno” de cada parte de la mezcla entre el total.
- Cantidad de la otra magnitud que aporta cada parte en la mezcla.

A partir de estos datos, utilizando el álgebra si es necesario, se calculará el dato por el que se pregunta.

Ejemplo: *se mezclan 30 kg de un pienso A que vale 0,7 €/kg con 10 kg de un pienso B que vale 1,5 €/kg. Calcula el valor de un kilogramo del pienso resultante de hacer la mezcla anterior.*

Kg totales de la mezcla: $30\ kg + 10\ kg = 40kg$

Precio total de la mezcla: $30\ kg \cdot 0{,}7\frac{€}{kg} + 10\ kg \cdot 1{,}5\frac{€}{kg} = 36\ euros$

Luego el valor de un kg de la mezcla es $\frac{36}{40}\frac{€}{kg} = 0{,}9\frac{€}{kg}$.

G. Tecnologías

En esta sección se abordará la justificación de las técnicas. Tampoco se pretende que los alumnos justifiquen de manera rigurosa las técnicas que emplean, sus justificaciones se basarán en las diversas definiciones, el sentido de las operaciones que otorga el contexto del problema, el uso del álgebra.

Si bien se espera que mediante las razones de ser sean capaces de dar una justificación a las técnicas que emplean. El docente cuando institucionalice las técnicas también justificará las mismas.

A continuación se muestran las tecnologías que estarán presentes en el aula, además se han incluido demostraciones más formales para determinadas técnicas.

TEC1. Tecnologías asociadas al análisis de situaciones de proporcionalidad

TEC1.1. Tecnologías asociadas a la identificación de magnitudes

Definición de magnitud: variable que se le puede asignar una medida, es decir, los posibles valores de la variable son tangibles, capaces de ser calculados mediante herramientas de medición.

El motivo de enseñar esta tecnología, es ayudar a los alumnos a identificar los datos del problema que influyen en la solución, que generalmente son únicamente las magnitudes.

TEC1.2. Tecnologías asociadas a problemas asociados a reflexionar que tipo de dependencia existe entre las variables

Definición de condiciones de regularidad: son las hipótesis que hay que asumir en los problemas para asegurar que la dependencia funcional se mantiene cuando las magnitudes que intervienen toman valores arbitrarios.

Para justificar el tipo de relación que existe entre las variables, se formulará que tipo de dependencia se piensa que existe (por ejemplo: proporcionalidad simple directa), para posteriormente comprobarlo empíricamente, si la primera magnitud aumenta el doble, ¿aumentará el doble la segunda magnitud?

TEC1.3. Tecnologías asociadas al cálculo de razones

Definición de la razón $\frac{a}{b}$ como:

- La cantidad a de la primera magnitud que se corresponde por cada cantidad b de la segunda magnitud.
- Razón como "tanto por uno": $\frac{a}{b}$ es la cantidad de la magnitud de a que se corresponde con cada unidad de la magnitud de b.

Definición $a\%$ de una determinada magnitud como la razón como "tanto por ciento", a es la cantidad que se corresponde por 100 unidades de la magnitud.

TEC2. Tecnologías asociadas a problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad

Definición de proporcionalidad directa: dos magnitudes son directamente proporcionales si al multiplicar o dividir una magnitud por cierto número real la otra magnitud se multiplica o divide, respectivamente, por dicho número. El cociente entre pares de magnitudes se mantiene constante, a dicha constante se la denomina constante de proporcionalidad directa.

Definición de proporcionalidad inversa: dos magnitudes son inversamente proporcionales si al multiplicar o dividir una magnitud por cierto número real la otra magnitud se divide o multiplica, respectivamente, por dicho número. El producto entre pares de magnitudes se mantiene constante, a dicha constante se la denomina constante de proporcionalidad inversa.

TEC2.1. Regla de Tres

Si bien puede darse una demostración general, como comentamos en la sección B, en los libros de texto, su tecnología brilla por su ausencia, es una fórmula memorística que se supone cierta. Como mencionamos en las técnicas, la Regla de Tres no será objeto de enseñanza.

TEC2.2. Proporciones

Por la definición de proporcionalidad directa o inversa, la constante de proporcionalidad entre dos magnitudes tiene que mantenerse invariante, por lo tanto, se puede plantearse una igualdad entre dos razones (una proporción), con la que podremos despejar el valor perdido mediante el uso del álgebra.

Como se mencionó en la sección de las técnicas, no se tratará el método de proporciones para abordar la proporcionalidad compuesta.

TEC2.3. Amalgamación de magnitudes

La tecnología que sustentará esta técnica en clase, será el significado que tienen el producto o el cociente de magnitudes según el contexto del problema. Por ejemplo: decir que 3 obreros trabajan 4 horas al día durante 5 días, es equivalente a decir que 3 obreros han trabajado $4 \cdot 5$ horas. La razón de no institucionalizar esta técnica es debido a la dificultad de dotar de significado la amalgamación de magnitudes en ciertos problemas. Por ejemplo: Si 2 obreros instalan 5 farolas en 4 horas. Si el valor perdido fuera relativo al número de farolas, podríamos amalgamar los obreros y las horas y decir que 5 farolas requieren 8 horas de trabajo, sin embargo, si el valor perdido fuera relativo al número de horas, resultaría complicado de comprender una amalgamación entre los obreros y las farolas.

Una justificación más formal, para la amalgamación de magnitudes, se puede dar a partir del tipo de dependencia funcional de la proporcionalidad compuesta y la propiedad asociativa. Sean $X_1, \ldots, X_n, X$ las $n+1$ magnitudes, X se corresponde con la magnitud del valor perdido, se relacionan de la siguiente manera:

$$f(X_1, \ldots, X_n, X) = X \cdot \prod_{i=1}^{n} X_i^{p_i} = cte, \text{ con } p_i \in \{\text{-}1,1\}$$

Basta considerar $\tilde{X} = \prod_{i=1}^{n} X_i^{p_i}$. $\tilde{X}$ sería la magnitud resultante de la amalgamación. La función

$$\tilde{f}(\tilde{X}, X) = X \cdot \tilde{X} = cte$$

Es del tipo de proporcionalidad simple.

TEC2.4. Paso a paso pasando por la unidad

La justificación en el aula de este método consistirá en probar que cada “paso” de esta técnica es correcto. Un paso involucra solo a dos magnitudes, a partir de la definición de proporcionalidad directa o inversa de dos magnitudes se comprobará que solo quedan afectadas dicho par de magnitudes en cada paso.

Lo que hace este método es hacer transformaciones en la función de proporcionalidad, que mantienen invariante la constante de proporcionalidad. Sea f la función de proporcionalidad, definida como antes. Un “paso” del método que involucra a las magnitudes X_i, X_j; donde la magnitud X_i aumenta un factor k:

$$f(X_1, \dots, X_n, X) = X \cdot X_1^{p_1} \cdot \dots \cdot kX_i^{p_i} \cdot \dots \cdot \frac{1}{k} X_j^{p_j} \cdot \dots \cdot X_n^{p_n} = \frac{\cancel{k}}{\cancel{k}} cte, \text{ con } p_i \in \{\text{-}1,1\}$$

TEC3. Tecnologías asociadas a problemas de comparación en situaciones de proporcionalidad.

En el caso de problemas de **comparación cuantitativa:**

Dadas $n+1$ magnitudes $X_1, \dots, X_n, X$, de las que se conoce dos tuplas $a_1, \dots, a_n, a$, y $b_1, \dots, b_n, b$ correspondientes a dos situaciones distintas de proporcionalidad. Se requiere comparar el valor de la función $C(X_1, \dots, X_n, X) = \frac{X}{\prod_{i=1}^{n} X_i^{p_i}}$ con $p_i \in \{\text{-}1,1\}$ para dichas tuplas. Dichas operaciones se justificarán por el contexto del problema y por la relación de proporcionalidad directa o inversa entre los pares de magnitudes que intervienen.

En el caso de problemas de **comparación cualitativa:**

Se justificarán por el contexto del problema y por la relación de proporcionalidad directa o inversa entre los pares de magnitudes que intervienen.

TEC4. Tecnologías asociadas a porcentajes sucesivos

La propia técnica T4.1 es en sí misma una tecnología que la justifica. Al aplicar la propiedad asociativa a la técnica T4.1 se justifica la técnica T4.2.

TEC5. Tecnologías asociadas a repartos

TEC5.1. Repartos directos

La justificación que se enseñara consiste en dar sentido a la razón $\frac{\text{cantidad a repartir}}{\text{total de participaciones}}$ mediante la definición de razón como “tanto por uno” con lo que dicha razón significa la cantidad que le toca a un participante por cada unidad de participación.

TEC5.2. Repartos inversos

Su justificación se basará en la definición de proporcionalidad inversa de dos magnitudes y el empleo del álgebra. Si se supone que un participante recibe una cantidad x en el reparto, se pueden calcular en función de x el resto de cantidades atendiendo a que la cantidad que le toca a cada participante es inversamente proporcional a su participación. Dado que la suma de las cantidades de todos los participantes es igual al total, se puede despejar la x planteando dicha igualdad. En el apartado de las técnicas se ilustra con un ejemplo.

TEC6. Tecnologías asociadas a problemas de mezclas y aleaciones

Significado de mezcla como unión. Para calcular los datos que se piden puede ser necesario justificaciones algebraicas o dar sentido a las razones que intervienen en el problema.

H. Secuencia didáctica y cronograma

La secuenciación didáctica constará de 12 sesiones de 50 minutos de duración, dedicándose las 2 últimas a la realización de una prueba escrita y la corrección de la misma. Debido a que los procesos de enseñanza y aprendizaje son dinámicos, no debe entenderse esta secuenciación como una guía que hay que seguir punto por punto, el docente deberá adaptarse a las dificultades que presenta el grupo de alumnos.

A continuación expondremos el cronograma de la secuenciación didáctica.

	Contenidos	**Razón de ser**	**Campos de problemas**
Sesión 1	Razón	Nº1-*30 minutos*	CP1
Sesión 2	Condiciones de regularidad. Dependencia funcional	Nº2-*10 minutos* Nº3-*40 minutos*	CP1.2
Sesión 3	Proporcionalidad simple	Nº3-*20 minutos*	CP2.1, CP2.2, CP3
Sesión 4	Proporcionalidad compuesta	Nº4-*25 minutos*	CP2.3
Sesión 5	Problemas de repaso		CP1,CP2,CP3
Sesión 6	Porcentajes encadenados.	Nº4-*15 minutos*	CP4, CP2
Sesión 7	Interés simple y compuesto	Nº4-*35 minutos*	CP4
Sesión 8	Repartos directos e inversos	Nº9-*10 minutos* Nº10-*20 minutos*	CP5
Sesión 9	Mezclas	Nº11-*15 minutos*	CP6
Sesión 10	Problemas de Repaso. Dudas		
Sesión 11	Examen		
Sesión 12	Entrega de los resultados del examen		

Con la finalidad de facilitar la lectura de la secuenciación se incluirán de nuevo los enunciados de las razones de ser expuestos en la sección D.

Sesión 1

Objetivos: Recordar el concepto de razón y el cálculo de razones.

Primero se establecerá un dialogo con la clase entorno al problema 1.1.1 para mostrar la relevancia de las magnitudes y distinguirlas de los números que no son magnitudes. Posteriormente se planteara el problema 3.4 de comparación cualitativa.

Posteriormente, se introducirá la **razón de ser nº1.** Con lo que se espera que recuerden el concepto de razón, como calcular razones y el significado de razón. El docente guiará la actividad, intentando que los alumnos vayan a ritmos similares, de ser necesario, el docente dará las menores pistas posibles, invitando a los alumnos a reflexionar si tienen dudas. Cuando lo considere oportuno, el docente institucionalizará el concepto de razón como "tanto por uno" y razón como "tanto por ciento".

Se concluirá la sesión planteando los siguientes problemas para que los resuelvan en clase 1.3.1, 1.3.2 y 1.3.3.

Razón de ser nº1: *Para preparar un aliño para ensalada, tomas como referencia las siguientes indicaciones de un libro de cocina:*

Para 100 ml de aliño:

Aceite	*60ml*
Vinagre	*30ml*
Soja	*10ml*

- *¿Qué significado tienen las siguientes cantidades* $\frac{60}{100}, \frac{30}{100}, \frac{10}{100}$*? ¿Cuánto suman las cantidades anteriores? ¿Qué explicación le das?*
- *Si quisiéramos preparar 1000 ml de aliño ¿Qué cantidades de aceite, vinagre y soja necesito?¿Expresa dichas cantidades dividiéndolas entre el aliño total?¿Qué relación guardan dichas fracciones con las del apartado anterior?*
- *¿Si quieres preparar 150 ml de aliño, qué cantidades de aceite, vinagre y suja necesitas? Expresa las cantidades en forma de fracción.*
- *¿Tienen algún significado en este problema los números 0.6, 0.3 y 0.1? ¿Podrías decir cuánto vale la razón entre el aceite y el aliño total para un aliño de 135 ml?*
- *¿Qué significado le das a la siguiente operación* $200\, ml \text{ aliño} \cdot \frac{60}{100} \cdot \frac{ml\ aceite}{ml\ aliño} = 120\, ml \text{ aceite}$*? ¿* $150\, ml \text{ aliño} \cdot \frac{60}{100} \cdot \frac{ml\ aceite}{ml\ aliño} = 90\, ml \text{ aceite}$*?*
- *Discute si un aliño formado por 51 ml de aceite, 8.5 ml de soja y 34 ml de vinagre sigue o no la receta.*
- *¿Qué sentido tiene decir que el 60% del aliño es aceite, el 30% es vinagre y el 10% soja?*
- *Si se prepara un nuevo aliño en el que el 55% del aliño es aceite. ¿Cuánto aceite habrá en 0,6 litros de aliño?*

Sesión 2

Esta sesión será llevada a cabo en la sala de ordenadores del centro, ya que para la segunda parte de la sesión se requiere el uso de GeoGebra.

Objetivo: En esta sesión se busca que los alumnos reflexionen sobre el proceso de modelización matemática que es inherente en los problemas de proporcionalidad aritmética.

Dado que ya están familiarizados con la proporcionalidad aritmética, en las razones de ser se introducirán problemas de proporcionalidad simple sencillos, para que vayan familiarizándose con ellos para la siguiente sesión. Se comenzará viendo la importancia de las condiciones de regularidad, al introducir la **razón de ser nº2**. Posteriormente el docente hará una puesta en común del concepto de condiciones de regularidad y se propondrá el problema 1.2.1.

Razón de ser nº2: *Una oveja come* $2\,m^2$ *de un determinado prado en un día. ¿Cuantos* m^2 *del prado comen 10 ovejas en un día? ¿Y 100 ovejas?*

¿Si el prado mide 50 m^2 *seguirán siendo ciertas las respuestas anteriores? ¿Qué condiciones habías supuesto para responder a las dos primeras preguntas?*

Posteriormente se discutirá cómo puede ser la relación de las variables en un problema. Para ello se planteará la **razón de ser nº3**. Con el fin de reducir la abstracción de los problemas mediante un estímulo visual y fomentar la competencia digital, se utilizará GeoGebra para representar puntos de las distintas funciones que están implícitas en los distintos problemas. El docente intentará que los alumnos se percaten del hecho de que la proporcionalidad simple directa se corresponde con una función lineal, que la proporcionalidad inversa corresponde a otro tipo de función. Y que se pueden dar otras dependencias funcionales o la ausencia de ellas.

Razón de ser nº3: *Se plantearán los siguientes problemas:*

1. *Jorge conduce a una velocidad constante. Al cabo de un rato se pregunta qué distancia ha recorrido al cabo de ciertos periodos de tiempo. Solo sabe que en 6 minutos ha recorrido 5 km. Completa la tabla:*

Horas conduciendo	*Km recorridos*
0,1	*5*
1	

	1
3	
	10
5	
6	

-¿Qué relación observas entre el tiempo conduciendo y la distancia recorrida?

-Representa gráficamente los datos anteriores

2. Jorge quiere ir de Zaragoza a Huesca en coche. Suponiendo que la distancia de Zaragoza a Huesca es 70km. Completa la siguiente tabla que indica el tiempo que tarda Jorge según la velocidad a la que circula.

Velocidad (en km/h)	*Tiempo (en horas)*
1	
	1
10	
	1
50	
100	
	2,5
	0,5

-¿Qué relación observas entre la velocidad y la duración del trayecto? Intenta explicarlo de la manera más precisa posible.

-Representa gráficamente los datos anteriores.

3.Jorge ha ido anotando la relación entre su estatura y su peso en los últimos 5 años. Lo anota todos los años a finales del mes de enero.

Año	*Altura (en m)*	*Peso (en kg)*
2014	*1,50*	*55*
2015	*1,55*	*60*
2016	*1,65*	*67*
2017	*1,67*	*72*
2018	*1,68*	*70*
2019		

-¿Qué relación observas entre la altura y el peso? Intenta explicarlo de la manera más precisa posible.

-Suponiendo que en 2019 a finales del mes de enero medirá 1,7m ¿Cuánto pesará?

Sesión 3

Objetivos: repasar los conceptos de proporcionalidad simple, directa e inversa.

El docente planteará la **razón de ser nº4**, para que los alumnos la resuelvan por el método que consideren más idóneo. Aunque con las preguntas que se plantean se intenta que un gran número de alumnos lo resuelvan por el método de paso a paso pasando por la unidad. Primero, el profesor estableciendo un dialogo con la clase establecerá las definiciones de proporcionalidad directa e inversa TEC2. Posteriormente, el docente no solo institucionalizará el método de paso a paso pasando por la unidad, sino que además, si hay un número considerable de personas que lo ha resuelto por Regla de Tres, el docente criticará el método atendiendo a su ausencia de significado y los posibles errores que puede conllevar. El docente hará mención al método de proporciones, relacionándolo con el concepto de razón visto en la primera sesión.

Posteriormente los alumnos realizarán el problema 2.1.1 de porcentajes. Luego realizarán dos problemas de comparación 3.1, 3.2. Se acabará la sesión planteando a los alumnos diversos problemas para que los resuelvan en clase, como los problemas 2.1.2, 2.2.2, 2.2.3.

Razón de ser nº4:

Problema: *3 obreros instalan 60 farolas en un mes. ¿Cuántas farolas instala un obrero en un mes? ¿Cuántas farolas instalarán 4 obreros en un mes? Explica las condiciones de regularidad.*

Problema: *leyendo dos horas al día, Ana tarda 4 días en leer un libro. ¿Cuántas horas tendrá que invertir en leer el libro? Si lee una hora al día ¿Cuántos días tardará en leerse el libro? ¿Y si se quisiera leer el libro en un día cuánto tardaría? Explica las condiciones de regularidad.*

Sesión 4

Objetivos: repasar los problemas de proporcionalidad compuesta.

Se planteará la **razón de ser nº5** y se hará una puesta en común sobre las técnicas empleadas. El docente institucionalizará la técnica de amalgamación y de paso a paso pasando por la unidad, haciendo mayor hincapié en esta última.

Para concluir la sesión se realizará un problema de comparación de tres magnitudes 3.3. Y otros problemas de proporcionalidad compuesta como 2.3.1, 2.3.2, 2.3.3.

Razón de ser nº5:

Problema 1: *3 albañiles trabajando 8 horas al día cobran 240 euros. ¿Cuánto cobra un albañil trabajando 8 horas al día? ¿Cuánto gana un albañil por hora de trabajo? Cuánto cobrarán al día 2 albañiles que trabajan 6 horas diarias. Explica las condiciones de regularidad.*

Problema 2: *3 albañiles trabajando 8 horas al día tardan 90 días en construir una casa determinada. ¿Cuánto tardarían si trabajaran 5 albañiles 6 horas al día? ¿Qué podemos decir de una cuadrilla de albañiles que ha tardado 30 días en construir esa casa? ¿Tiene sentido decir que 300 albañiles trabajando 8 horas al día construirían esa casa en 0.9 días? Explica las condiciones de regularidad.*

Problema 3: *3 albañiles colocan 5 farolas en 15 horas. ¿Cuánto tardará 1 albañil en colocar 1 farola? ¿Cuántas horas necesitan 2 albañiles para colocar 3 farolas? Si una cuadrilla de albañiles ha tardado 45 horas en colocar 10 farolas ¿Cuántos albañiles tenía dicha cuadrilla?*

Sesión 5

Problemas de repaso de las sesiones anteriores, los problemas que se plantearán responderán a aquellos en los que los alumnos presenten mayores dificultades. En los últimos minutos de la clase se planteará un problema de proporcionalidad compuesta de más de 3 magnitudes, el problema 2.3.4.

Se realizara el ejercicio 2.4.1 para aumentar en el manejo de la técnica de paso a paso pasando por la unidad.

Sesión 6

Objetivos: introducir las nociones de incremento/descuento de un producto en %. Introducir los porcentajes sucesivos.

Se comenzará la sesión con la **razón de ser nº6**, con la que se analizarán diversas formas de presentar las razones de los descuentos en la vida real. Posteriormente, con la **razón de ser nº7**, se introducirá el campo de problemas de porcentajes sucesivos. El docente, comentando las respuestas dadas por los alumnos, institucionalizará las técnicas T.4.1, T4.2 para resolver porcentajes sucesivos. Se continuará la sesión haciendo problemas como el problema 4.2.

Razón de ser nº6: *Miguel fue de compras y vio las siguientes ofertas:*

- *Tienda A: "Si compras 3, te regalamos otro"*
- *Tienda B: "30% de rebaja"*
- *Tienda C: "Paga dos llévate tres (3x2)"*
- *Tienda D: "El segundo a mitad de precio"*

Calcula el % de descuento asociado a cada oferta. Reflexiona sobre en qué tienda comprarías suponiendo que el precio inicial de los productos que quieres comprar es el mismo.

Razón de ser nº7: *El precio por un kg de naranjas en cierta frutería el año pasado era de 1.2€/kg en invierno, en primavera se incrementó un 10%, en verano se incrementó un 5 %, en otoño un 15% y este invierno ha bajado un 30%. ¿Cuánto cuesta el kilo de naranjas este invierno?*

Sesión 7

Objetivo: introducir el interés simple y compuesto. Definir conceptos asociados al interés, como el capital, beneficios, préstamo, interés en cierto periodo de tiempo, inversión…

Si bien los problemas de interés simple y compuesto pueden ser resueltos con las técnicas vistas en las sesiones anteriores. Los problemas financieros forman parte del currículo (Est.MAAP.2.1.6.) y no hay que desdeñar su importancia en el futuro de los estudiantes.

Para introducir los conceptos de interés simple y compuesto. Se introducirá la **razón de ser nº8**, el profesor irá guiando la actividad y resolverá las dudas relativas a las definiciones relacionados con el interés. Al finalizar, institucionalizará los conceptos de interés simple y compuesto. Para acabar la sesión se realizarán problemas de intereses como el problema 4.3.

Razón de ser nº8: *Un vendedor de refrescos quiere instalar una máquina que cuesta 3000€ en un colegio. Para ello quiere pedir un préstamo de 3000€ a un banco.*

El vendedor tiene pensado saldar su deuda con el banco dentro de 1 año. Consultando dos bancos, valora las siguientes opciones:

El primer banco le ofrece dicho dinero con unos interés mensuales del 5% sobre el precio del préstamo.

El segundo banco, le ofrece dicho dinero con unos interés mensuales del 4.5% sobre el precio del préstamo el primer mes, y posteriormente, sobre el dinero que debe al banco el mes anterior.

¿Qué préstamo le conviene más? ¿Y si la saldará dentro de 3 meses? Si la máquina le produce unos beneficios de 200 euros al mes. Cuál será su capital al final del año si la maquina se ha devaluado un 10% desde que la compró. Expresa en que porcentaje ha crecido su capital.

Sesión 8

Objetivo: Se introducirán los conceptos de reparto directo e inverso

Para introducir los repartos directamente proporcionales se planteará a los estudiantes la **razón de ser nº9**, el docente institucionalizará la técnica T5.1.

Para los repartos inversamente proporcionales, se introducirá la **razón de ser nº10**. Después de dejar cierto tiempo a los alumnos para reflexionar, el docente ayudará con el planteamiento inicial de los problemas de repartos proporcionales basándose en la técnica T5.2. Al final del problema, institucionalizará dicha técnica. Se terminará la sesión realizando los problemas de repartos 5.1, 5.2.

Razón de ser nº9: *María, Eva, Daniel y Diana participan en una competición de tiro con arco, cada participante tiene tres flechas. María acierta 3, Eva acierta 1, Daniel acierta 2 y Diana no acierta ninguno. Hay un premio de 50 euros a repartir entre las personas según el número de aciertos. ¿Cuánto dinero le corresponde a cada uno?*

Razón de ser nº10: *Se concede una beca para ayudar a pagar el alquiler de 3000€ a un piso con tres estudiantes. Jorge, con unos ingresos de 200€/mes. Marta, con unos ingresos de 400€/mes. Alicia con unos ingresos de 300€/mes. ¿Cómo se deben repartir el dinero?*

Sesión 9

Objetivo: se introducirán los problemas de mezclas

Para introducir los problemas de mezclas, se planteará la **razón de ser nº11**. Posteriormente, el docente dialogará con la clase sobre cómo abordar este tipo de problemas, institucionalizando la técnica T6. Se continuará la sesión, realizando otros problemas 6.1, 6.2.

> **Razón de ser nº11**: *En una tienda venden una mezcla de cacahuetes, pistachos, maíz frito. El precio en euros por un Kg de los anteriores productos es de 14€/kg, 10€/kg, 7€/kg respectivamente. Para hacer la mezcla anterior se usan 3 Kg de cacahuetes, 5 de pistachos y 2 de maíz frito. ¿Cuánto cuesta un Kg de la mezcla?*

Sesión 10

Problemas de repaso de las tres sesiones anteriores y dudas.

Sesión 11

Examen (Se detallara en la sección de evaluación). No debe entenderse que la sesión 11 se corresponde con la clase posterior a la sesión 10. Se recomienda dejar a los alumnos unos días para poder repasar los conceptos y problemas trabajados a lo largo de las sesiones anteriores. Una buena opción puede ser plantear la prueba escrita para la sesión posterior al fin de semana.

Sesión 12

Corrección del examen (Se detallara al final de la sección de evaluación)

I. Evaluación

En la elaboración de una prueba escrita para evaluar el grado de adquisición de competencias y conocimientos por parte de los alumnos hay que tener en consideración los criterios y estándares de aprendizajes. Como mencionamos en la sección A, solo tenemos los siguientes estándares para 4º E.S.O. Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas.

Est.MAAP.2.1.6. Aplica porcentajes a la resolución de problemas cotidianos y financieros y valora el empleo de medios tecnológicos cuando la complejidad de los datos lo requiera.

Est.MAAP.2.1.7. Resuelve problemas de la vida cotidiana en los que intervienen magnitudes directamente e inversamente proporcionales.

Siendo coherentes con estos estándares y con la metodología seguida en el transcurso de la unidad la prueba escrita se centrará en la resolución de problemas de los diferentes contenidos tratados en esta unidad didáctica.

A la hora de fijar unos criterios para posibilitar una corrección lo más objetiva posible, se ha tomado como referencia el Modelo de Tercios de Garín, Muñoz y Oller (2012). Estos autores proponen una corrección basada en la penalización de los errores. Lo cual tiene la ventaja de reducir posibles sesgos en la corrección relativos a las creencias de los profesores, los profesores no podrán penalizar una respuesta correcta si los alumnos no han usado la técnica deseada por el docente. En este modelo, una respuesta correcta siempre se calificará con la máxima puntuación.

También se busca ajustar los enunciados de los problemas a las respuestas que se esperan, precisando en los enunciados si se quiere que se utilice una técnica concreta. En nuestro caso, se dará libertad a los alumnos para utilizar la técnica que deseen, sin embargo, cabe señalar que en el transcurso de las sesiones de la secuenciación didáctica se hará hincapié en el uso de determinadas técnicas para abordar los problemas, se espera que los alumnos las sigan en el examen.

Por último, siguiendo este modelo, se clasificarán las tareas que intervienen en la resolución de los problemas en tres campos:

- **Tareas principales:** constituyen el objeto principal del cual se quiere evaluar. Donde el alumno mostrará el grado de comprensión y manejo de los contenidos de la unidad.
- **Tareas auxiliares específicas:** son las tareas que se requieren para llegar a la solución del problema y que están directamente relacionadas con los contenidos de la unidad.
- **Tareas auxiliares generales:** están formadas por todas aquellas tareas que se requieren para obtener la solución del problema pero que ya han sido tratadas y evaluadas en cursos anteriores. Como las operaciones aritméticas, algebraicas…

Los errores en cada uno de los anteriores campos serán penalizados, respectivamente, con hasta un 100%, 67% y 33% de la calificación total del enunciado. Se concretarán los distintos porcentajes de penalización en cada problema, pudiendo variar según la consideración que se le otorga a cada tarea en un problema concreto.

Con todo esto se pretende reducir la alta variabilidad entre correctores que se puede presentar en la corrección de exámenes de matemáticas, siendo más objetivos a la hora de evaluar a los alumnos teniendo unos criterios de corrección definidos.

Al final de esta sección se explicita la forma en la que se comunicarán los resultados de la prueba a los alumnos. A continuación se muestran los problemas que conforman la prueba escrita, detallando su campo de problemas, técnicas, tecnologías; resolución esperada, jerarquización de las tareas con su porcentaje de penalización máximo, otras posibles respuestas esperadas y posibles errores.

Prueba escrita (enunciado)

Problema 1. *(1.5 puntos) Juan quiere comprar un determinado móvil. Si ese móvil cuesta 300 € sin incluir el IVA, siendo el IVA un 21% ¿Cuánto le ha costado el móvil si tiene un descuento del 10%?*

Problema 2. *(2 puntos) Cuatro amigos alquilan un apartamento en vacaciones, durante 10 días. Si Juan y Alicia están los 10 días, Pedro llega el quinto día y Jorge el séptimo día. ¿Cuánto dinero tiene que pagar cada uno si el apartamento ha costado 800€?*

Problema 3. *(1.5 puntos) Un granjero necesita 900 Kg para alimentar a sus 30 cerdos durante 10 días. Después de vender 10 de sus cerdos. ¿Cuánta comida consumen los cerdos restantes en 5 días? Plantea las condiciones de regularidad.*

***Problema 4** (1.5 puntos): Un empresario invierte 50000 € en un determinado negocio. Obtiene unos intereses anuales del 4% respecto al dinero invertido. Calcula el beneficio que obtiene en 6 años si:*

a) Reinvierte los beneficios anuales

b) No reinvierte los beneficios anuales.

***Problema 5** (1.5 puntos): Una fábrica que se dedica a la producción bombillas, quiere comprar una maquina nueva y cambiarla por una de las que ya tiene. La fábrica tiene tres máquinas: la primera produce 1000 bombillas en 220 minutos, la segunda produce 300 bombillas en 1,5 horas, la tercera produce 500 bombillas en 2 horas. ¿Qué máquina debería remplazar?*

***Problema 6** (2 puntos): Rosa y Jorge han pensado en vender un zumo de tres sabores para recaudar fondos para una ONG. Para ello deciden mezclar las siguientes cantidades de zumo:*

- *3 botellas de 1 litro de zumo de piña.*
- *4 botellas de 2 litros de zumo de naranja.*
- *8 botellas de 500ml de zumo de pomelo.*

a) Han llamado a la mezcla "zumo Pinapo". Si el zumo de piña, naranja, pomelo les ha costado a 0,5 €/l, 1€/l, 0,75€/l respectivamente. ¿Cuánto cuesta el litro de zumo Pinapo? (1 punto)

b) Van a vender el zumo en vasos de 250 ml que les cuestan 5 céntimos la unidad. Además han alquilado un puesto donde poder vender el zumo que les supone 25 € al día. Suponiendo que van a vender todo el zumo en un día. ¿A cuánto tienen que vender cada vaso de Pinapo para obtener un beneficio total del 80% sobre el precio de coste? (1punto)

Problema 1. (1.5 puntos) *Juan quiere comprar un determinado móvil. Si ese móvil cuesta 300 € sin incluir el IVA, siendo el IVA un 21% ¿Cuánto le ha costado el móvil si tiene un descuento del 10%?*

Campos de problemas	Técnicas	Tecnologías
CP4, CP2	T4,T2	TG4,TG2

Resolución del problema

Cálculo de porcentajes:

- IVA: $\frac{100+21}{100}\frac{\text{€ con IVA}}{\text{€ sin IVA}} = 1{,}21\ \frac{\text{€ con IVA}}{\text{€ sin IVA}}$

- Descuento: $\frac{100-10}{100}\frac{\text{€ con } descuento}{\text{€ sin } descuento} = 0{,}9\ \frac{\text{€ con } descuento}{\text{€ sin } descuento}$

Aplicamos los porcentajes:

Móvil con el IVA:

$$300\ \text{€ sin IVA} \cdot 1{,}21\ \frac{\text{€ con IVA}}{\text{€ sin IVA}} = 363\text{€ con IVA}$$

Móvil con el IVA y el descuento:

$$363 \cdot 0{,}9 = 326{,}7\text{€ con IVA y con descuento}$$

Tareas principales (penalización hasta el 70%)	
Establecer la relación de porcentajes encadenados	Penalización de hasta 1,05 puntos
Tareas auxiliares específicas (penalización hasta el 50%)	
Calculo de los porcentajes aislados	Penalización de hasta 0,75 puntos
Tareas auxiliares generales (penalización hasta el 10%)	
Realización de operaciones aritméticas	Penalización de hasta 0,15 puntos

Otras posibles respuestas correctas

Calculo directo:

$$300\text{€} \cdot 1{,}21 \cdot 0{,}90 = 326.7\text{€}$$

Errores esperados

- Utilizar 21%, 10% en vez de 121% y 90% a la hora de realizar las operaciones
- Sumar/restar los porcentajes y calcular el $(21 \pm 10)\%$
- Bloquearse al no saber si aplicar el IVA al precio inicial o al precio con el descuento.
- Calcular un único porcentaje (100%+21%-10%)
- Resolver los porcentajes como un valor perdido y confundirse a la hora de realizar las operaciones

Problema 2. (2 puntos) ***Cuatro amigos alquilan un apartamento en vacaciones, durante 10 días. Si Juan y Alicia están los 10 días, Pedro llega el quinto día y Jorge el séptimo día. ¿Cuánto dinero tiene que pagar cada uno si el apartamento ha costado 800€?***

Campos de problemas	Técnicas	Tecnologías
CP5	T5.1	TG5.1

Resolución del problema

El apartamento cuesta 800 €, veamos la participación de cada persona:

-Juan y Alicia están 10 días.

-Pedro está 6 días.

-Jorge está 4 días.

Sumamos las participaciones:

$10 + 10 + 6 + 4 = 30$ días a repartir.

Calculamos cuanto debe pagar cada persona por día a repartir:

$\frac{800\ €}{30\ \text{días}} = 26,\hat{6}$ € por día de estancia.

Luego Juan y Alicia tienen que pagar $266,\hat{6}$ € cada uno.

Pedro tiene que pagar $6\ \text{días} \cdot 26,\hat{6}\ €/\text{día} = \underline{160€}$

Jorge tiene que pagar $4\ \text{días} \cdot 26,\hat{6}\ €/\text{día} = \underline{106.\hat{6}€}$

Tareas principales (penalización hasta el 70%)	
Establecer la razón como "tanto por uno" del precio por día de estancia.	Penalización de hasta 1,05 puntos
Tareas auxiliares específicas (penalización hasta el 50%)	
Cálculo del precio por cada participante a partir de la razón anterior.	Penalización de hasta 0,75 puntos
Tareas auxiliares generales (penalización hasta el 10%)	
Realización de operaciones aritméticas	Penalización de hasta 0,15 puntos

Otras posibles respuestas correctas

- Sumar todos los días a repartir:

$10 + 10 + 6 + 4 = 30$ días a repartir

Calcular la razón de los días que esta cada uno entre el total de días:

Juan y Alicia ➔ $\frac{10}{30}, \frac{10}{30}$ respectivamente.

Pedro ➔ $\frac{6}{30}$

Jorge ➔ $\frac{4}{30}$

A cada participante le corresponde dicha razón de los gastos.

- Dividir el precio total entre el número de días y construir una tabla para ver cuánto tiene que pagar cada uno:

$$\frac{800\ €}{10\ \text{días}} = 80\ €/\text{día}$$

Día	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º	
$\frac{\text{Precio piso}}{\text{día}}$	80€	80€	80€	80€	80€	80€	80€	80€	80€	80€	Total
Juan	40€	40€	40€	40€	$26,\hat{6}$ €	$26,\hat{6}$ €	$26,\hat{6}$ €	20€	20€	20€	$266,\hat{6}$ €
Alicia	40€	40€	40€	40€	$26,\hat{6}$ €	$26,\hat{6}$ €	$26,\hat{6}$ €	20€	20€	20€	$266,\hat{6}$ €
Pedro	-	-	-	-	$26,\hat{6}$ €	$26,\hat{6}$ €	$26,\hat{6}$ €	20€	20€	20€	160€
Jorge	-	-	-	-	-	-	-	20€	20€	20€	$106,\hat{6}$€

Errores esperados

- No calcular bien el número de días que está cada persona. Ejemplo: Jorge llega el séptimo día, decir que está $10 - 7 = 3$ días, cuando está los días 7, 8, 9, 10; es decir 4 días.
- Considerar a Juan y Alicia como un participante en vez de como dos.
- No saber plantear el problema al no dar las participaciones del reparto de forma explícita.

Problema 3. (1.5 puntos) ***Un granjero necesita 900 Kg para alimentar a sus 30 cerdos durante 10 días. Después de vender 10 de sus cerdos. ¿Cuánta comida consumen los cerdos restantes en 5 días? Plantea las condiciones de regularidad.***

Campos de problemas	Técnicas	Tecnologías
CP2	T2.4	TG2

Resolución del problema

Condiciones de regularidad: suponemos que todos los cerdos consumen la misma comida diaria.

Calculamos cuánta comida consumen 20 cerdos en 5 días:

$$900\ kg\ - 30\ cerdos\ - 10\ días$$

En un día los 30 cerdos consumen:

$$90\ kg\ - 30\ cerdos\ - 1\ días$$

Un cerdo consume en un día:

$$3\ kg\ - 1\ cerdos\ - 10\ días$$

Luego 20 cerdos en 5 días:

$$60\ kg\ - 20\ cerdos\ - 1\ días$$

$$300\ kg\ - 20\ cerdos\ - 5\ días$$

Los 20 cerdos en 5 días consumen 300 kg.

Tareas principales (penalización hasta el 70%)	
Calcular correctamente el valor perdido en la proporcionalidad compuesta	Penalización de hasta 1,05 puntos
Tareas auxiliares específicas (penalización hasta el 50%)	
Plantear correctamente la situación de proporcionalidad	Penalización de hasta 0,75 puntos
Tareas auxiliares generales (penalización hasta el 10%)	
Realización de operaciones aritméticas	Penalización de hasta 0,15 puntos

Otras posibles respuestas correctas

Hallar el valor perdido mediante otra técnica como puede ser la Regla de Tres, proporciones, amalgamación.

Errores esperados

- No plantear correctamente la situación de proporcionalidad compuesta
- Fallar al aplicar la fórmula si se resuelve por Regla de Tres
- Equivocarse al plantear se dos magnitudes son inversa o directamente proporcionales

Problema 4 (1.5 puntos): ***Un empresario invierte 50000 € en un determinado negocio. Obtiene unos intereses anuales del 4% respecto al dinero invertido. Calcula el beneficio que obtiene en 6 años si:***

c) Reinvierte los beneficios anuales

d) No reinvierte los beneficios anuales.

Campos de problemas	Técnicas	Tecnologías
CP4	T4.2	TG4

Resolución del problema

a) Calculamos el porcentaje:

$$\frac{100+4}{100} = 1{,}04 \frac{\text{€ con interés}}{\text{€ sin interés}}$$

Aplicamos el porcentaje:

$$50000 \text{ €} \cdot (1{,}04)^6 = 63265.95 \text{ €}$$

El beneficio será $63265.95 \text{ €} - 50000 \text{ €} = 13265.95 \text{ €}$

b) Calculamos el porcentaje:

$$\frac{0+4}{100} = 0{,}04 \frac{\text{€ con interés}}{\text{€ sin interés}}$$

Aplicamos el porcentaje: $6 \cdot (50000 \text{ €} \cdot (0{,}04)) = 12000 \text{ €}$

El beneficio será 12000 €

Tareas principales (penalización hasta el 90%)	
Establecer la relación de porcentajes encadenados y del interés simple	Penalización de hasta 1,35 puntos
Tareas auxiliares específicas (penalización hasta el 50%)	
Calculo de los porcentajes aislados. Plantear correctamente los beneficios obtenidos.	Penalización de hasta 0,75 puntos
Tareas auxiliares generales (penalización hasta el 10%)	
Realización de operaciones aritméticas	Penalización de hasta 0,15 puntos

Otras posibles respuestas correctas

a) Usar la T4.1 y calcular $\left(\left((50000 \text{ €} \cdot 1{,}04) \cdot 1{,}04\right) \cdot 1{,}04 \cdot \ldots\right) = 63265{,}95 \text{ €}$

Calcular el 4% de beneficios para cada año:

1ºaño: $50000 \text{ €} \cdot 0.04 = 2000 \text{ €}$

2ºaño: $52000 \text{ €} \cdot 0.04 = 2080 \text{ €}$

3ºaño: $54080 \text{ €} \cdot \ldots$

Errores esperados

- Elegir mal los porcentajes: usar 1.04 en vez de 0.04 o viceversa. Utilizar el porcentaje $1 - 0.04$.
- Plantear el interés simple como compuesto o viceversa.
- En vez de calcular $50000\ € \cdot (1.04)^6$, calcular $(50000\ € \cdot 1.04)^6$.
- En vez de poner como solución el beneficio obtenido en 6 años, poner el capital total.

Problema 5 (1.5 puntos): ***Una fábrica que se dedica a la producción bombillas, quiere comprar una maquina nueva y cambiarla por una de las que ya tiene. La fábrica tiene tres máquinas: la primera produce 1000 bombillas en 220 minutos, la segunda produce 300 bombillas en 1,5 horas, la tercera produce 500 bombillas en 2 horas. ¿Qué máquina debería remplazar?***

Campos de problemas	Técnicas	Tecnologías
CP3	T3	TG3

Resolución del problema

Máquina 1:

$$\frac{1000}{220} = 4{,}5454 \text{ bombillas/minuto}$$

Máquina 2:

$$\frac{300}{90} = 3{,}3333 \text{ bombillas/minuto}$$

Máquina 3:

$$\frac{500}{120} = 4{,}1666 \text{ bombillas/minuto}$$

La máquina nueva debería remplazar a la máquina 2 ya que es la que tiene la producción más baja.

Tareas principales (penalización hasta el 90%)	
Plantear las tres situaciones de proporcionalidad	Penalización de hasta 1,35 puntos

Tareas auxiliares específicas (penalización hasta el 66%)	
Calculo de las razones como "tanto por uno" y hallar el mínimo.	Penalización de hasta 1 punto
Tareas auxiliares generales (penalización hasta el 10%)	
Realización de operaciones aritméticas	Penalización de hasta 0,15 puntos

Otras posibles respuestas correctas

-En vez de utilizar la razón como "tanto por uno" para comparar las situaciones de proporcionalidad. Utilizar la razón fijando un número concreto de bombillas o minutos, por ejemplo, calcular los minutos que tarda cada máquina en producir 100 bombillas.

-Comparar dos máquinas, elegir la de producción más baja. Comparar dicha máquina con la restante y tomar la de producción más baja.

Errores esperados

- Elegir la máquina con producción más alta en vez de la más baja.
- Errores en el cambio de unidades entre horas y minutos.
- Si en vez de utilizar la razón como "tanto por uno" se fija otro número de bombillas o minutos distinto a la unidad. Errores al calcular el valor perdido para dicho valor en las distintas situaciones de proporcionalidad.

Problema 6 (2 puntos): ***Rosa y Jorge han pensado en vender un zumo de tres sabores para recaudar fondos para una ONG. Para ello deciden mezclar las siguientes cantidades de zumo:***

- ***3 botellas de 1 litro de zumo de piña.***
- ***4 botellas de 2 litros de zumo de naranja.***
- ***8 botellas de 500ml de zumo de pomelo.***

a) Han llamado a la mezcla "zumo Pinapo". Si el zumo de piña, naranja, pomelo les ha costado a 0,5 €/l, 1€/l, 0,75€/l respectivamente. ¿Cuánto cuesta el litro de zumo Pinapo? (1 punto)

b) Van a vender el zumo en vasos de 250 ml que les cuestan 5 céntimos la unidad. Además han alquilado un puesto donde poder vender el zumo que les supone 25 € al día. Suponiendo que van a vender todo el zumo en un día. ¿A cuánto tienen que vender cada vaso de Pinapo para obtener un beneficio total del 80% sobre el precio de coste? (1punto)

Campos de problemas	Técnicas	Tecnologías
CP6, CP2	T6,T2	TG6,TG2

Resolución del problema

Apartado a)

Calculamos el precio de cada parte de la mezcla:

Piña➔ $3 botlleas \cdot 1 \frac{litro}{botella} \cdot 0{,}5 \frac{euros}{litro} = 1.5\ euros$

Naranja➔ $4 botlleas \cdot 2 \frac{litros}{botella} \cdot 1 \frac{euros}{litro} = 8\ euros$

Naranja➔ $8 botlleas \cdot 0{,}5 \frac{litros}{botella} \cdot 0{,}75 \frac{euros}{litro} = 3\ euros$

Precio total de la mezcla $1{,}5 + 8 + 3 = 12{,}5\ euros$

Calculamos los litros totales de la mezcla:

Litros de mezcla $=$ litros piña $+$ litros naranja $+$ litros pomelo $= 3 + 8 + 4 = 15$ litros

Precio del litro de “Pinapo”➔ $\frac{12{,}5}{15} \frac{euros}{litros} = \boxed{0{,}8\hat{3}\ €/l}$

Apartado b)

Calculamos el precio de coste total:

$$15\ litros \cdot 4 \frac{vasos}{litro} \cdot 0{,}05 \frac{euros}{vaso} + 12{,}5\ euros + 25\ euros = 40{,}5\ euros$$

Se gasta en total 40.5 euros, quiere obtener unos beneficios del 80%, es decir hay que calcular el 180% del precio anterior.

$$40{,}5\ euros \cdot \frac{180}{100} = 72{,}9\ euros$$

Quiere obtener 72,9 euros vendiendo 15 litros de Pinapo, luego tiene que vender el litro a $\frac{72.9}{15} \frac{euros}{litros} = 4{,}86\ €/l$. Cada vaso de 250 ml lo tiene que vender a $4{,}86 \frac{euros}{litros} \cdot 0{,}25 \frac{litros}{vasos} = \boxed{1{,}215\ €\ /vaso}$

Tareas principales (penalización hasta el 80%)	
Planteamiento de la razón de la mezcla	Cuestión a). Penalización de hasta 0,8 puntos
Planteamiento de los beneficios	Cuestión b). Penalización de hasta 0,8 puntos
Tareas auxiliares específicas (penalización hasta el 50%)	
Realización de operaciones con razones como “tanto por uno”	Penalización de hasta 1 punto
Tareas auxiliares generales (penalización hasta el 20%)	
Simplificación y realización de las operaciones aritméticas.	Penalización de hasta 0,4 puntos

Otras posibles respuestas correctas

Apartado a)

Planteen la relación cuánto aporta cada parte al total de la mezcla:

$$0{,}5€/l\ \text{ zumo piña} \rightarrow\ 3/15 \text{ de la mezcla}$$

$$1€/l\ \text{ zumo naranja} \rightarrow 8/15 \text{ de la mezcla}$$

$$0{,}75€/l\ \text{ zumo pomelo} \rightarrow\ 4/15 \text{ de la mezcla}$$

El precio €/l de la mezcla es: $0{,}5 \cdot \frac{3}{15} + 1 \cdot \frac{8}{15} + 0{,}75 \cdot \frac{4}{15} = 0{,}8\hat{3}\ €/l$

Apartado b)

Se puede plantear de forma algebraica y despejar la incógnita.

Sea $x =$ precio de venta de un vaso (lo que me piden). Planteamos la ecuación:

$$\text{precio vaso} \cdot \text{vasos que vendo} = \text{lo que gano} = \text{lo que quiero ganar} = \text{costes} \cdot 1{,}8$$

$$x \cdot (15 \cdot 4) = 40{,}5 \cdot 1{,}8$$

Errores esperados

Apartado a)

- Sumen o hagan la media los precios/litro de los zumos para calcular el precio/litro de la mezcla.

Apartado b)

-Multipliquen los costes por 0,8 en vez de 1,8.

-No tengan en cuenta el precio de los vasos o del alquiler del puesto en los costes.

Comunicación de los resultados

Por el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato, se dice que la evaluación tiene que ser:

- ***Evaluación continua:*** se evaluará al alumno en el día a día mediante la participación, el cuaderno de clase, la observación. Con esto se quiere conseguir un seguimiento constante y actualizado del alumno, implementado las medidas oportunas de refuerzo educativo, si fuera el caso.
- ***Evaluación formativa:*** la corrección de las pruebas de evaluación, aparte de calificar a los alumnos, deberán llevar consigo la correspondiente respuesta del profesor señalando fallos y cómo abordarlos. Así mismo se fomentará la autorreflexión por parte del alumno, intentando que el estudiante se dé cuenta en qué modo puede mejorar.

El primer punto se puede abordar a lo largo de la sesiones de la secuenciación didáctica. Respecto al segundo punto, la realización de una prueba escrita nos da una buena oportunidad para fomentar el carácter formativo de la evaluación.

Antes de exponer la forma en la que se ha pensado para comunicar los resultados de la prueba escrita, cabe hacerse la siguiente pregunta: ¿Qué podemos hacer con la información obtenida de la prueba escrita para mejorar los procesos de enseñanza-aprendizaje?

La prueba escrita nos da una oportunidad para corregir los posibles fallos de los alumnos y mejorar así su aprendizaje en la materia. Un método habitual, consiste en una corrección del examen en la pizarra por parte del docente, si bien este método lo considero positivo. A continuación sugiero una forma de complementarlo donde gran parte del protagonismo de la corrección recae en los propios alumnos, con lo que se pretende que interioricen y subsanen sus errores, presten más atención en el proceso de corrección y se autoevalúen al hallar fallos propios.

Se intentará abordar la corrección del examen en la sesión posterior a la prueba, en la misma semana; con esto se persigue que los estudiantes tengan reciente el examen para que se acuerden no solo de los conocimientos en la materia sino también de las partes en las que tuvieron más dificultades.

En la corrección de la prueba escrita se invertirá una sesión de 50 minutos, se plantea proceder de la siguiente manera: el docente corregirá los exámenes otorgando una calificación numérica a los diversos problemas del examen, como es habitual. Sin embargo, dicha calificación la anotará en su cuaderno, en el examen no hará ninguna anotación. Solo pondrá en el examen una nota global que podrá ser la de insuficiente bajo (nota menor que 2,5), insuficiente, suficiente, bien, notable, sobresaliente.

En primer lugar, el docente corregirá el examen en la pizarra, haciendo hincapié en los principales fallos detectados en el examen, para posteriormente entregar los exámenes a los estudiantes.

Posteriormente, los alumnos corregirán sus exámenes. **Por cada punto que corrijan bien de sus fallos en el examen, se les subirá 0,2 la nota del examen**. Es decir, si un alumno ha sacado un 6, en nuestro modelo de corrección, en donde se penalizan los errores, esto quiere decir que ha tenido errores que le han bajado 4 puntos la nota, si el alumno, consigue detectar y subsanar dichos fallos se le subirá un $4 \cdot 0{,}2 = 0{,}8$ la nota.

Se entenderá por corrección, la detección y corrección de los fallos de los alumnos en la resolución de los distintos problemas. Si un problema está sin responder, y el alumno lo resuelve copiando la resolución del profesor no se le otorgará ningún punto por dicha corrección. Sin embargo, los alumnos calificados con insuficiente bajo (han obtenido una calificación menor que 2,5) sí que se les contará que resuelvan dichos problemas.

Este método, puede parecer a primera vista que puede modificar significativamente las notas de los estudiantes. Sin embargo no es así, hay que tener en cuenta que:

- Como máximo un alumno puede subir 2 puntos la nota, si tiene un 0, se quedaría en un 2.
- Los alumnos con calificaciones menores a 3,75 seguirán suspensos aunque logren corregir el resto de sus fallos bien.
- Un alumno con una nota mayor que 5 solo podría subir 1 punto la nota.
- Tampoco se espera que los alumnos se den cuenta y corrijan todos sus errores en el examen.
- Los alumnos con altas calificaciones tendrán que esforzarse más en detectar sus errores y solo podrán modificar unas décimas sus notas.

Este método se explicará antes de que el profesor corrija el examen en la pizarra. Para favorecer la atención por parte de la clase a dicha corrección y que copien las soluciones en su cuaderno.

Ventajas:

- Los alumnos prestarán más atención a la corrección del profesor
- Los alumnos se autoevalúan corrigiendo sus propios fallos
- Los alumnos aprenden de sus errores.

Desventajas:

- Puede que haya fallos importantes que no detecten los alumnos.
- Se introduce variabilidad en la corrección del profesor.
- Se invierte una sesión entera.
- Puede que, a pesar de la corrección del profesor, halla alumnos que consideren como fallos, respuestas que eran correctas.

Respecto a la autoevaluación por parte del docente

Los procesos de enseñanza y aprendizaje deben aspirar a mejorar de forma continua, para ello un aspecto clave es la autoevaluación por parte del docente. La prueba escrita y la propia observación del transcurso de las sesiones deben tomarse como referencia para detectar dificultades y reflexionar sobre la metodología con el fin de proponer cambios para mejorar la propuesta didáctica.

También convendría pasar una encuesta anónima a los alumnos al final del trimestre, donde valoren la labor del docente, su propio desempeño, opiniones para mejorar. Esta herramienta cumple una doble función, por un lado, conocer la opinión de los alumnos; por otro lado, fomentar la responsabilidad y visión crítica por parte de los mismos.

Referencias

García-Milà, M., & Martí, E. (2005). El pensamiento del adolescente. *Antología de lecturas*, 365-380.

Gairín J. M., Muñoz J. M., & Oller A. M. (2012). Propuesta de un modelo para la calificación de exámenes de matemáticas. *Investigación en Educación Matemática XVI*. Jaén: SEIEM, pp. 261-274.

Gairín J. M., & Oller A. M. (2013). La génesis histórica de los conceptos de razón y proporción y su posterior aritmetización. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 16(3), 317-338.

García, M., & Ortega, P. (2016). *Matemáticas aplicadas 4 E.S.O.* Ed. Edelvives.

Gómez, B. (2011). El análisis de manuales y la identificación de problemas de investigación en Didáctica de las Matemáticas. PNA, 5(2), pp. 49-65.

Huntley, M.A. & Terrell, M.S. (2014). One-step and multi-step linear equations: a content analysis of five textbook series. *ZDM Mathematics Education, 46,* 751-766.

Inhelder, B., & Piaget, J. (1985). *De la lógica del niño a la lógica del adolescente*. Barcelona: Paidós (original publicado en 1955).

Martínez, S., Muñoz, J.M., & Oller, A. M. (2014). Tratamiento de la proporcionalidad compuesta en cuatro libros de texto españoles. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau & T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 435-444). Salamanca, Spain: SEIEM.

Martínez, S., Muñoz, J.M., Oller, A.M., & Pecharromán, C. (2014). Una propuesta innovadora para la enseñanza de la proporcionalidad aritmética en el primer ciclo de ESO. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), *Actas del congreso, Las nuevas metodologías en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas, (pp. 459-470)*. Segovia: Academia de Artillería.

Martínez, S., Muñoz, J.M., & Oller, A.M. (2015a). Un estudio comparativo sobre la proporcionalidad compuesta en libros de texto españoles de Educación Secundaria Obligatoria durante la LOGSE-LOE-LOMCE. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, (8).

Martínez, S., Muñoz, J.M., & Oller, A.M. (2015b). Estrategias utilizadas por estudiantes de distintos niveles educativos ante problemas de proporcionalidad compuesta.

Martínez, S., Muñoz, J.M., Oller, A.M., & Ortega, T. (2017). Análisis de problemas de proporcionalidad compuesta en libros de texto de 2º de eso. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *20*(1), 95-122.

Mira, R. (2016). *Matemáticas enseñanzas aplicadas 4 E.S.O.* Ed. Santillana

Monterrubio, M.C. & Ortega, T. (2009). Creación de un modelo de valoración de textos matemáticos. Aplicaciones. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 37-53). Santander: SEIEM.

Oller, A. M., & Gairín, J. M. (2013). La génesis histórica de los conceptos de razón y proporción y su posterior aritmetización. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *16*(3), 317-338.

Oller, A. M. (2012). *Proporcionalidad aritmética: Una propuesta didáctica para alumnos de secundaria*. (Tesis doctoral, no publicada) Universidad de Valladolid, Valladolid, España. Recuperable en http://uvadoc.uva.es/handle/10324/1118.

Schubring, G. (1987). On the methodology of analysing historical textbooks: Lacroix as textbook author. *Learn. Math*., 7 (3), 41-51.

Vallejo, C., & Fuentes B. (2016). *Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas 4 E.S.O.* Ed. Anaya.

Van Dooren, W., De Bock, D., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2008). The linear imperative: An inventory and conceptual analysis of students' overuse of linearity. *Journal for Research in Mathematics Education*, 311-342.